

# *Triángulo plano: Deformación plana*

**Viana L. Guadalupe Suárez**  
**Carmelo Militello Militello**  
*Departamento de Ingeniería Industrial*  
*Área de Mecánica*

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Civil e Industrial  
Universidad de La Laguna  
Tenerife, España

## 1. Elemento Triangular de 3 nodos (*Constant Strain Triangular (CST)*)

### Características:

- Permite resolver problemas de elasticidad plana
- Elemento sencillo, formulación similar al cálculo matricial de las barras
- Campo de desplazamiento dentro del elemento es lineal por lo tanto las deformaciones son constantes por lo que es necesario utilizar mallas muy tupidas para discretizar el dominio.

### Descripción del elemento:

1. Elegimos un sistema de coordenadas x-y
2. Identificamos el número de nodos = 3
3. Definimos los grados de libertad por nodo:  $u$  (desplazamiento en x),  $v$  (desplazamiento en y) =  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$
4. Se definen las posiciones de cada nodo en el sistema de coordenadas cartesianas:

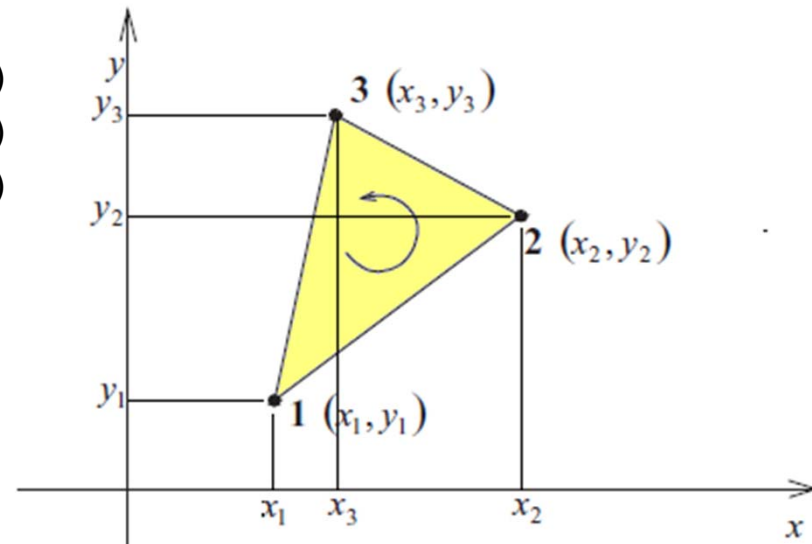
Nodo 1:  $(x_1, y_1)$

Nodo 2:  $(x_2, y_2)$

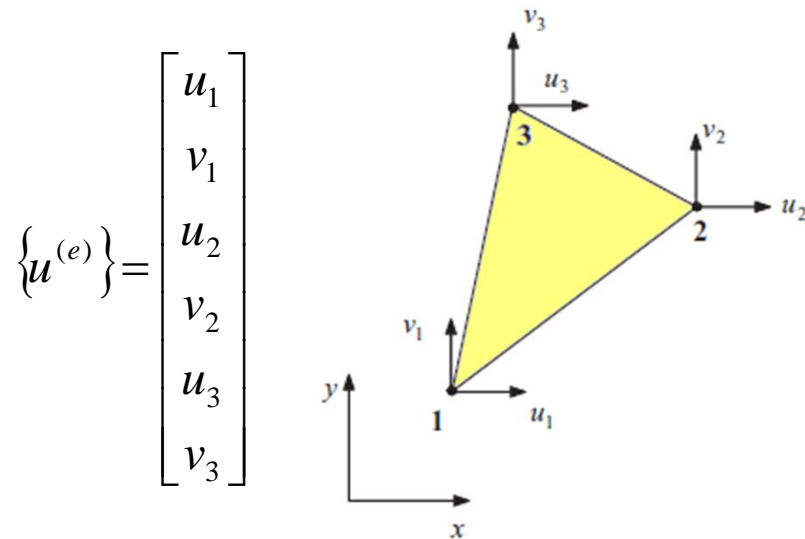
Nodo 3:  $(x_3, y_3)$

Área del triángulo:

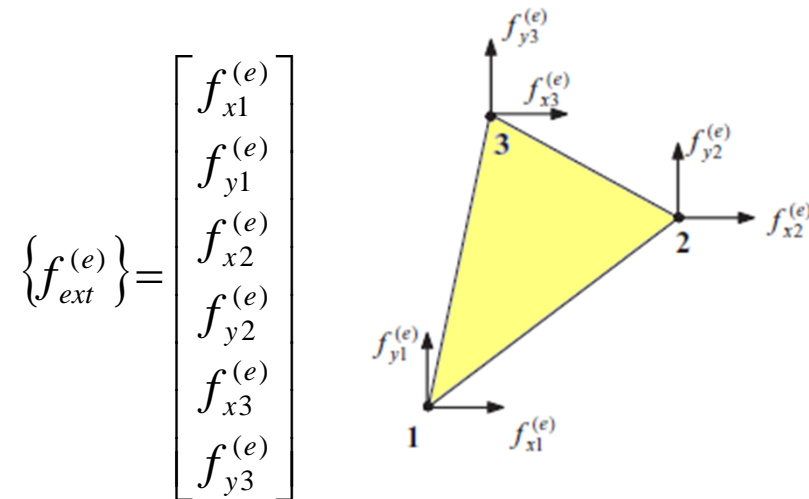
$$\Delta = \frac{1}{2} (x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2))$$



**Vector de desplazamientos nodales**



**Vector de fuerzas externas:**



**Selección de la función que describe el campo de desplazamiento:**

Seleccionamos dentro del elemento una función matemática que se aproxime a la solución de los desplazamientos según la ecuación diferencial. Esta función se expresará mediante el método de los elementos finitos sólo en función de los nodos del elemento, de manera que cuando se calcule el valor de esos nodos podrá conocerse, interpolando, la solución en todos los puntos dentro del elemento.

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= a_1 + a_2x + a_3y \\
 v(x, y) &= b_1 + b_2x + b_3y
 \end{aligned}$$

Campo de desplazamiento lineal (Polinomio de Pascal)

**Campo de desplazamiento expresado en función de las funciones de forma o polinomios de interpolación**

$$\left. \begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} (x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2) + (x_2y_3 - x_3y_2)) \\ N_2(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} (x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3) + (x_3y_1 - x_1y_3)) \\ N_3(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} (x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + (x_1y_2 - x_2y_1)) \end{aligned} \right\} \text{Funciones de formas lineales del triángulo plano}$$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= N_1(x, y)u_1 + N_2(x, y)u_2 + N_3(x, y)u_3 \\ v(x, y) &= N_1(x, y)v_1 + N_2(x, y)v_2 + N_3(x, y)v_3 \end{aligned}$$

**Relación deformación-desplazamiento nodales.**

$$\bar{\varepsilon}(x, y) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [B_1 \quad B_2 \quad B_3] \bar{d} = [B] \bar{d}$$

■ Matriz [B]

$$[B] = \frac{1}{2\Delta} \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ \hline c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} b_1 &= (y_2 - y_3); & b_2 &= (y_3 - y_1); & b_3 &= (y_1 - y_2); \\ c_1 &= (x_3 - x_2); & c_2 &= (x_1 - x_3); & c_3 &= (x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Relación tensión-desplazamiento nodales:

$$\bar{\sigma}(x, y) = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \bar{\varepsilon}(x, y)$$

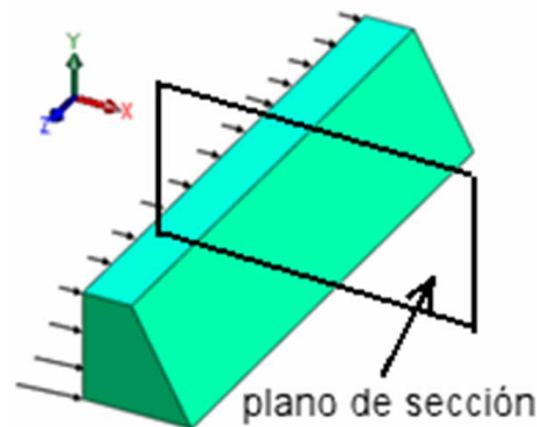
❖ DEFORMACIÓN PLANA

■ Matriz [D]

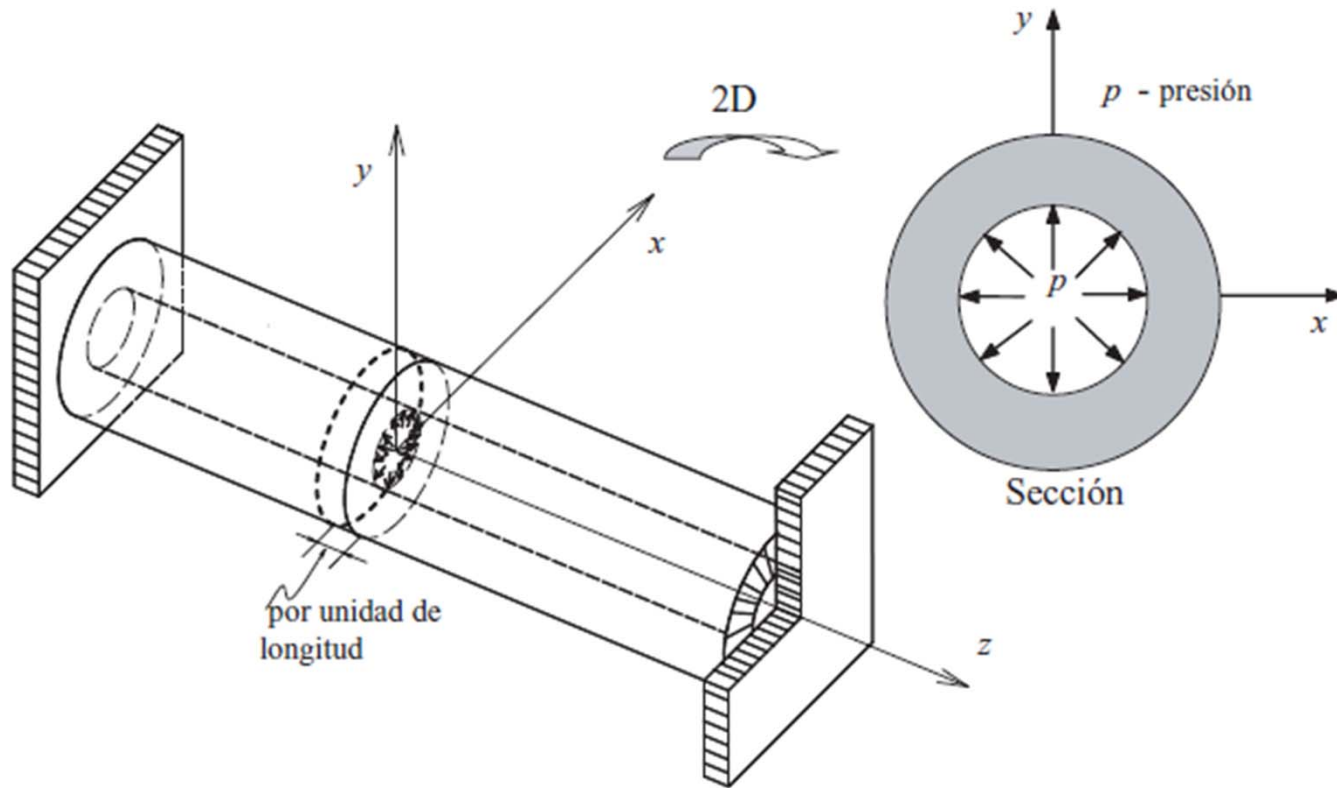
$$\begin{matrix} \sigma_z \neq 0 \\ \varepsilon_z = 0 \end{matrix}$$

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

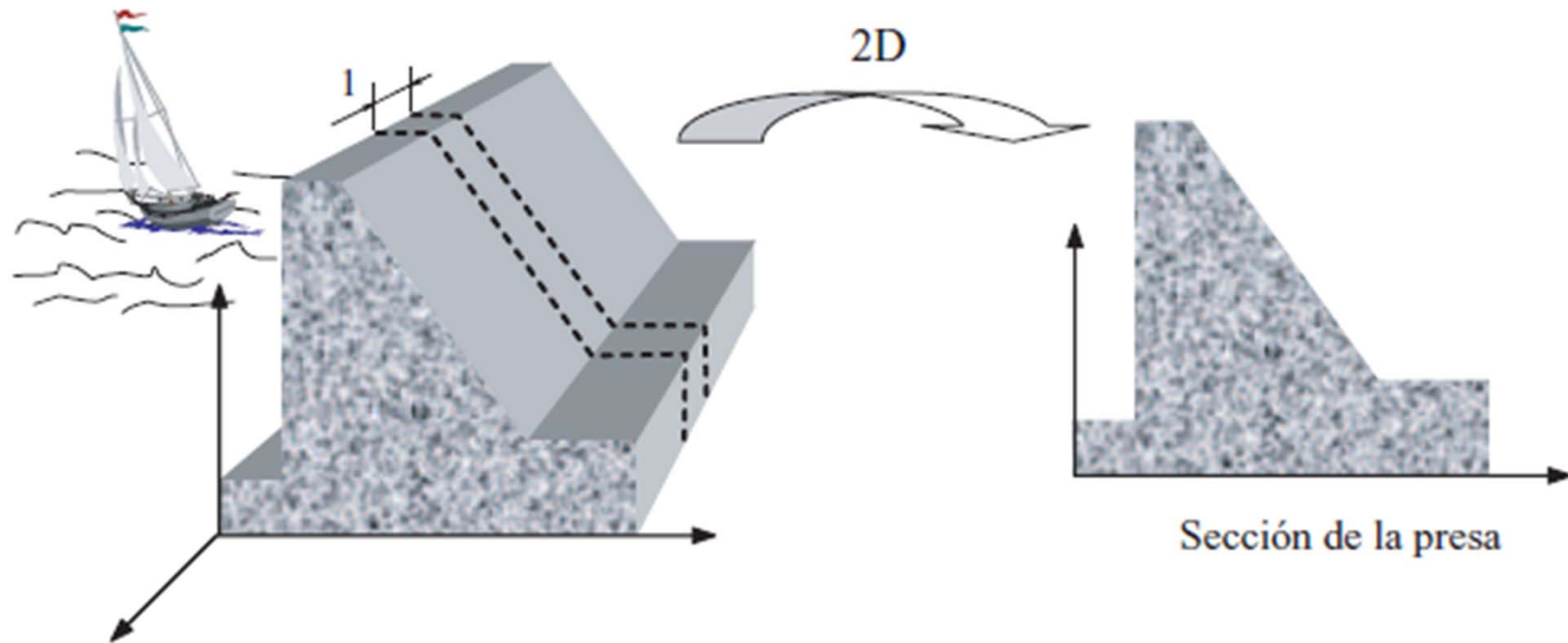
- Un caso de deformación plana se identifica cuando la cota del espesor es mucho mayor que las cotas de las sección.
- Para estos problemas, se ignora una la deformación que hay lo largo del espesor.  $\varepsilon_z = 0$



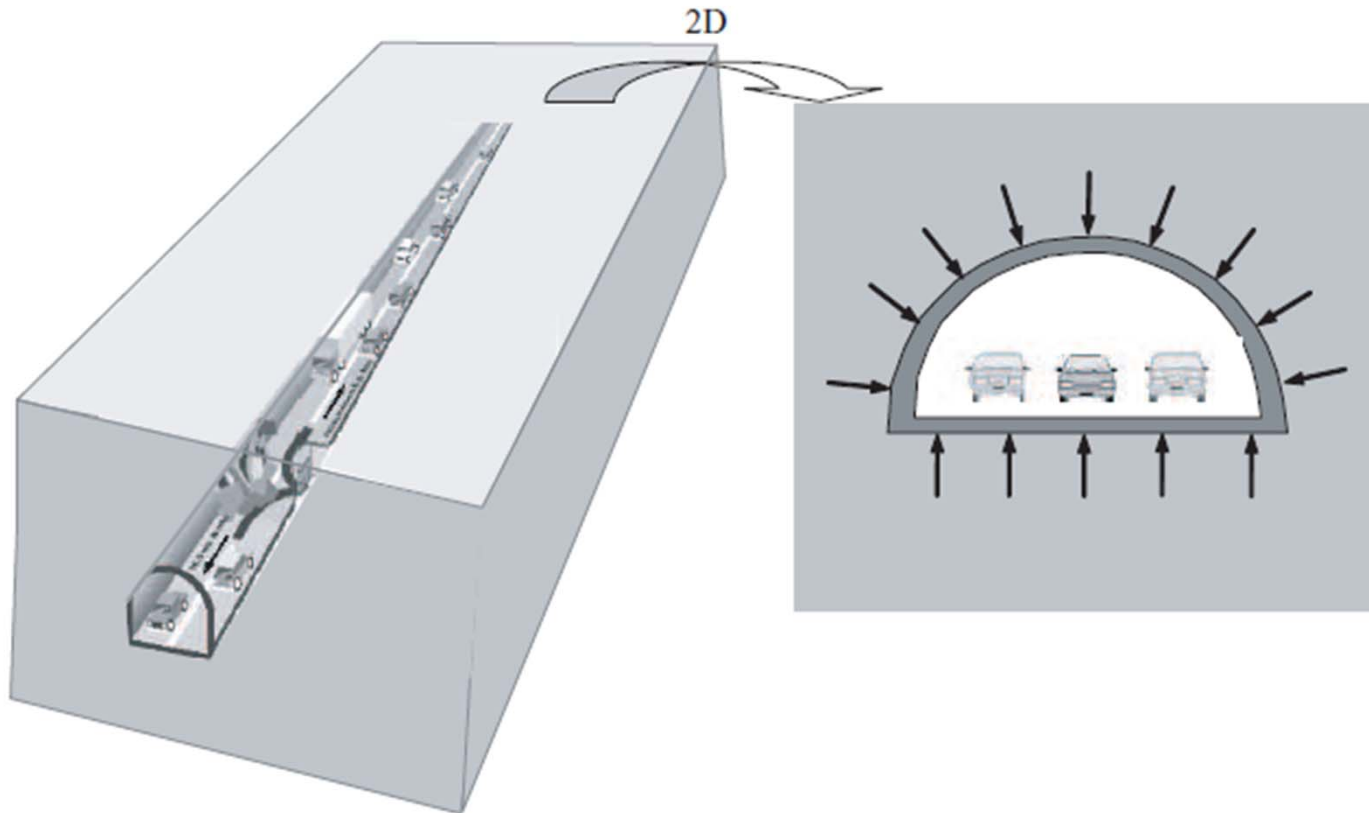
❖ EJEMPLOS DE DEFORMACIÓN PLANA: Cilindro bajo presión



❖ EJEMPLOS DE DEFORMACIÓN PLANA: Presa o dique



❖ EJEMPLOS DE DEFORMACIÓN PLANA: Tunnel





Matriz de Rigidez: (Tensión plana)

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV = tA [B]^T [D]^* [B]$$

$$dV = dx dy dz = t dx dy = tA = (\text{espesor})(\text{área})$$

$$* [D]_{\text{plana}}^{\text{Deformación}} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$