# *Formulación de viga en el plano*

***Viana L. Guadalupe Suárez***
***Carmelo Militello Militello***
*Departamento de Ingeniería Industrial*
*Área de Mecánica*

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Civil e Industrial
Universidad de La Laguna
Tenerife, España

# Índice.

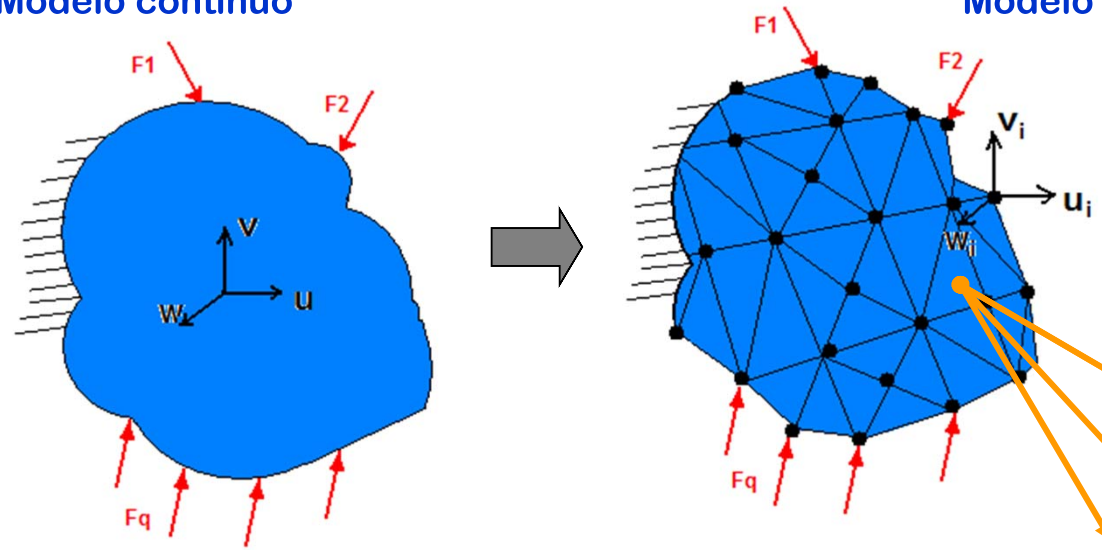
# 1. Conceptos vistos.

## •Método de los elementos finitos.

Proceso de Discretización:
METODO DE ELEMENTOS FINITOS

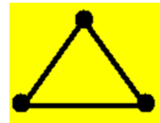
Modelo continuo

Modelo discreto




Elementos 3D

Elementos 2D



Elementos 1D

$$F = \sum_i F_i$$

$$F_p = \sum_p F_p$$

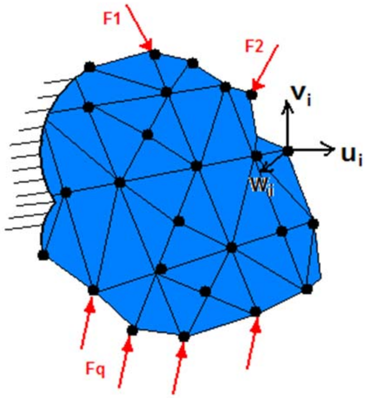
$$K = \sum_E K_E = \int_V [B]^T [D][B] dV$$

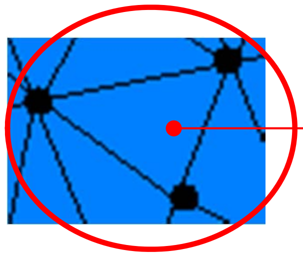
Ecuación de equilibrio: *Principio de minimización de la energía*

$$\boxed{Ku = F + F_p \Rightarrow u = [K]^{-1}(F + F_p)}$$

## 1. Conceptos vistos.

•**Método de los elementos finitos.**



$$\boxed{K_E = \int_V [B]^T [D][B] dV}$$

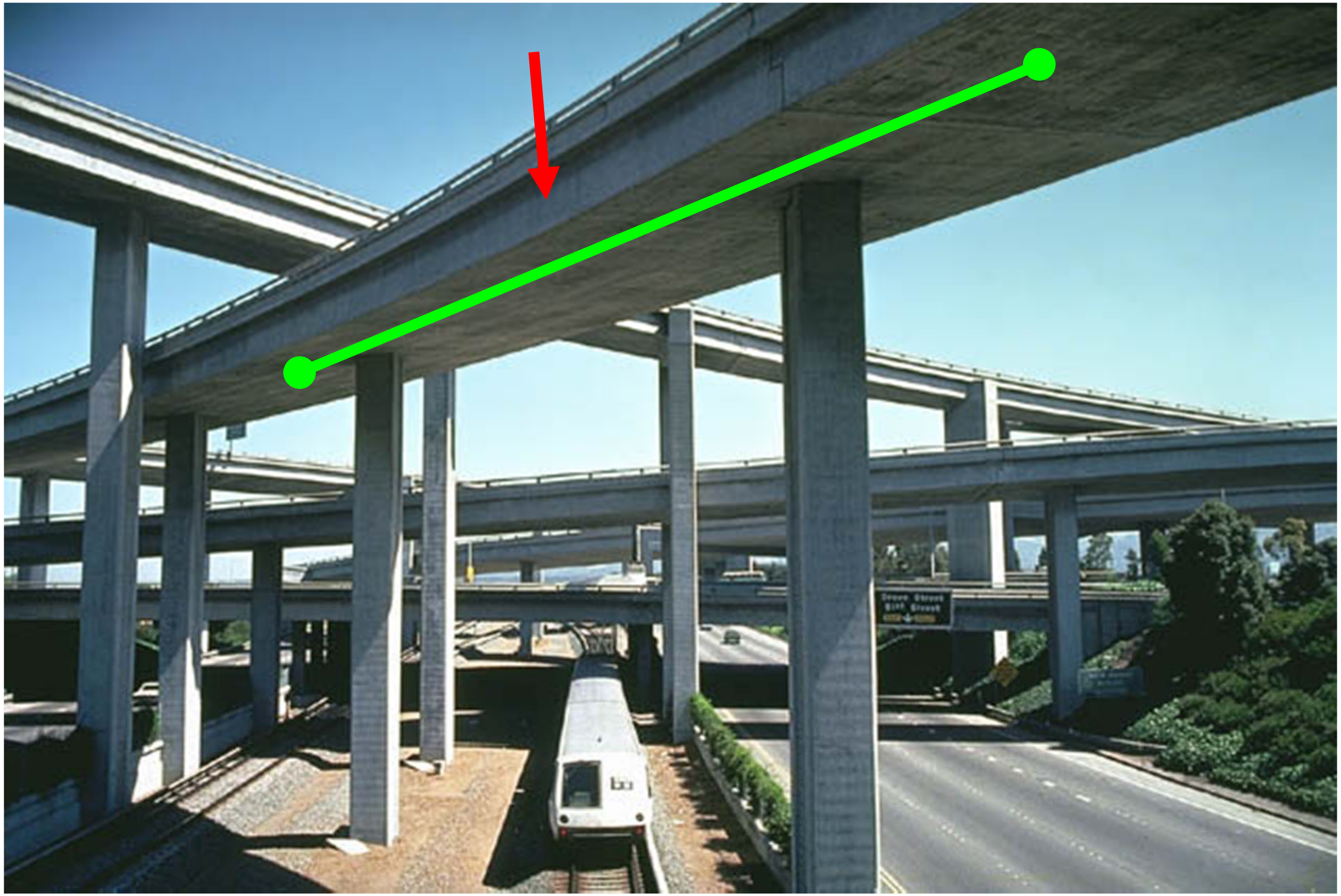
- Campo de desplazamiento: U, V ,W ⇒ $[B]$ $\varepsilon = [B]u$
- Propiedades del material: $E, \upsilon$ ⇒ $[D]$ $\sigma = [D]\varepsilon = [D][B]u$

## 2. Ejemplos de las estructuras de viga

Puentes trabajando como estructuras de viga frente a una carga transversal

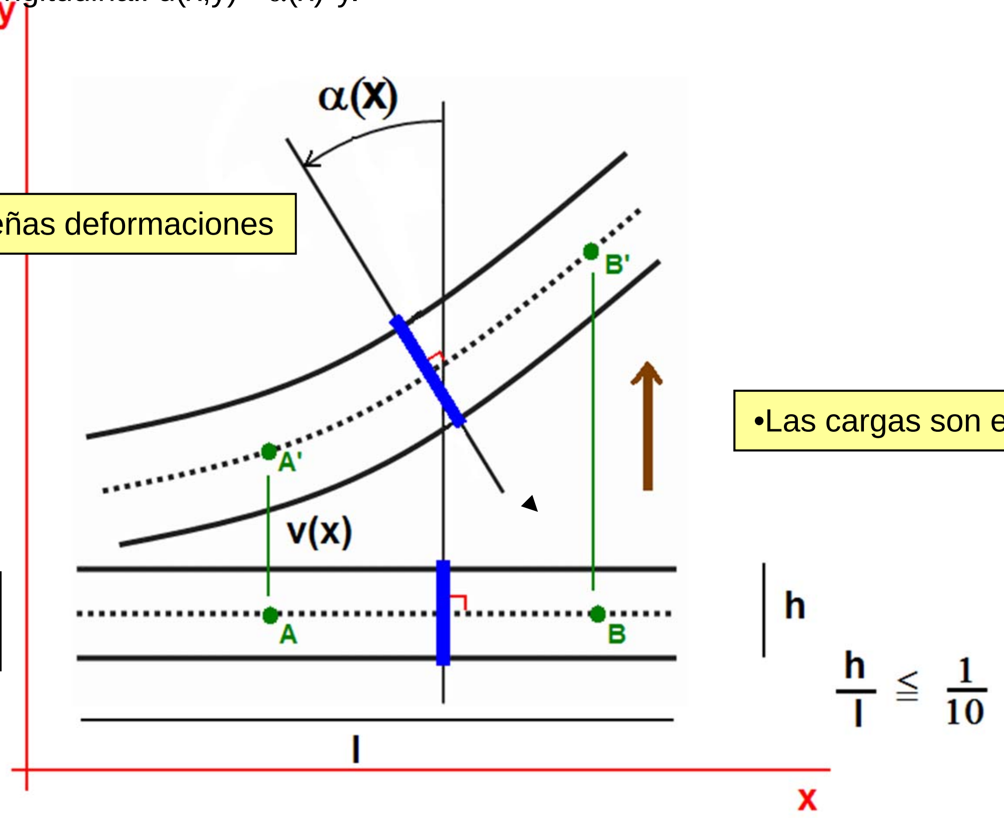
## 2. Ejemplos de las estructuras de viga

## 2. Ejemplos de las estructuras de viga



## 3. Características de la viga de Bernoulli.

- **Hipótesis de Euler-Bernoulli.**
    - *Las secciones planas inicialmente perpendiculares al eje de la viga, siguen siendo perpendiculares al eje de la viga después de la deformación.*
    - Las secciones perpendiculares sufren un giro $\alpha(x)$ y un desplazamiento vertical v(x). Se consideran que son muy pequeños.
    - El desplazamiento vertical sólo depende de x: v(x)
    - El desplazamiento longitudinal: u(x,y)=-$\alpha$(x)*y.



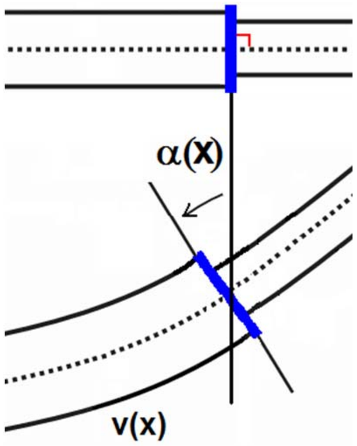

• Pequeñas deformaciones

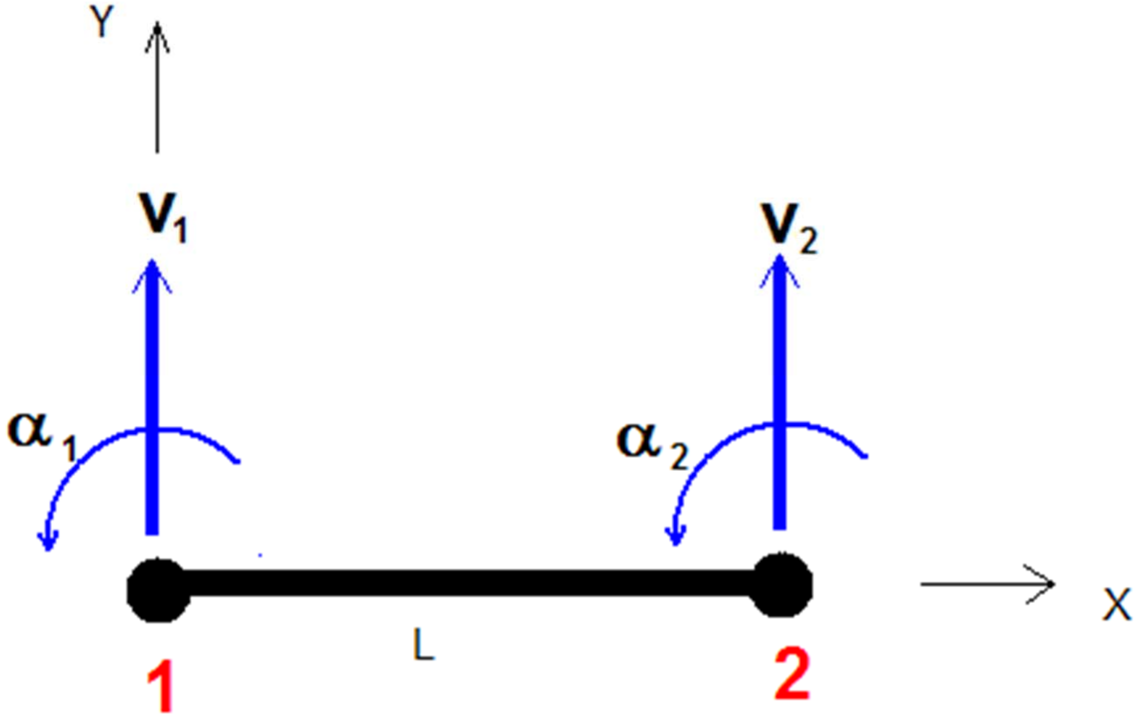
•Las cargas son estáticas

•El material elástico lineal y homogéneo e isótropo.

# 4. Formulación del elemento de numérico.

- Tipo de Elemento.




→2 grados de libertad por nodo
→4 grados de libertad por elemento

# 4. Formulación del elemento de viga.

## . Campo de desplazamiento.

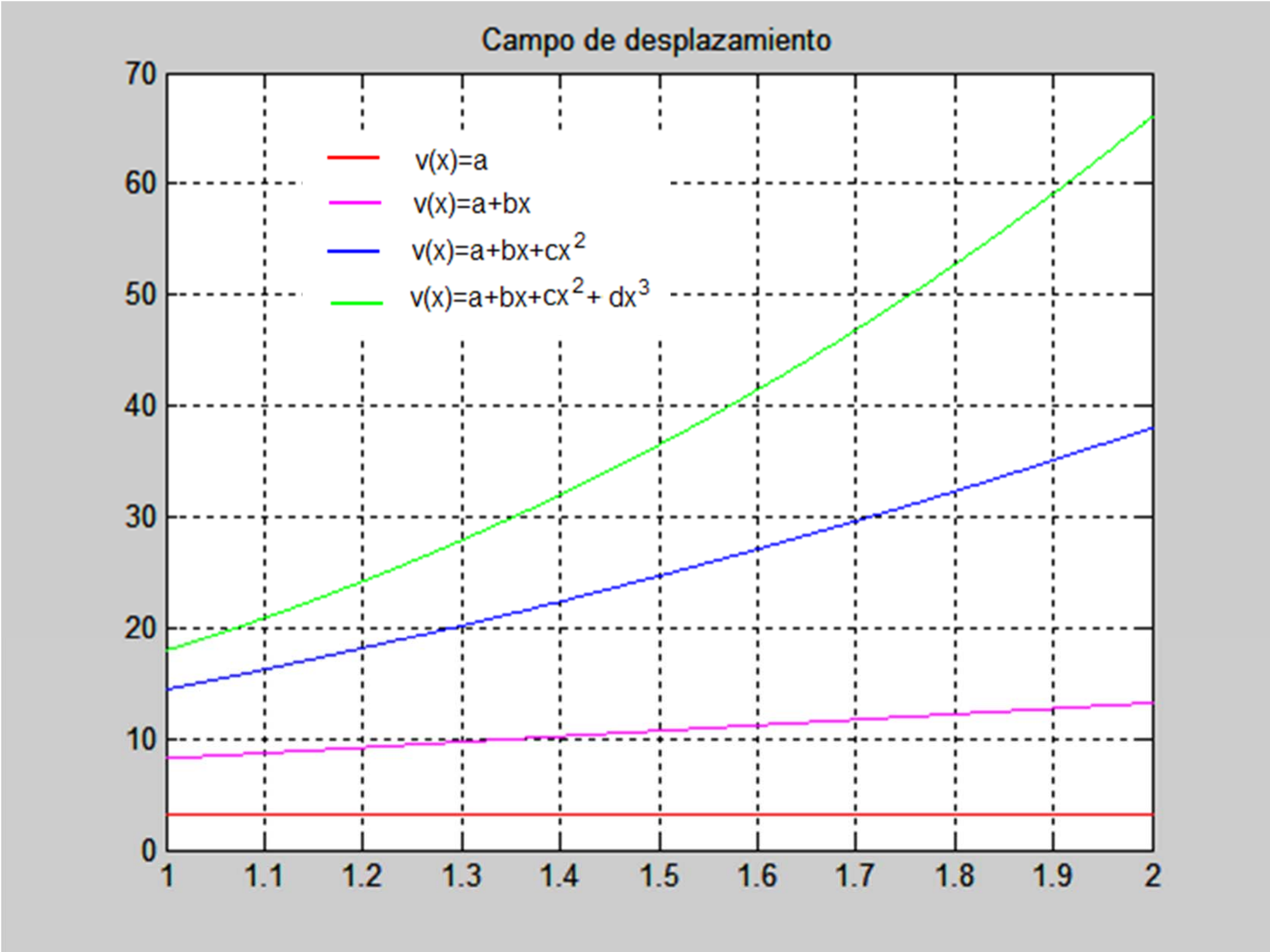
$$\boxed{v(x) = a + bx + cx^2 + dx^3}$$

## * Implicaciones:

$$Momento -> M = -EI \frac{\partial^2 v(x)}{\partial^2 x} = -EI(2c + dx)$$ → Varía linealmente.

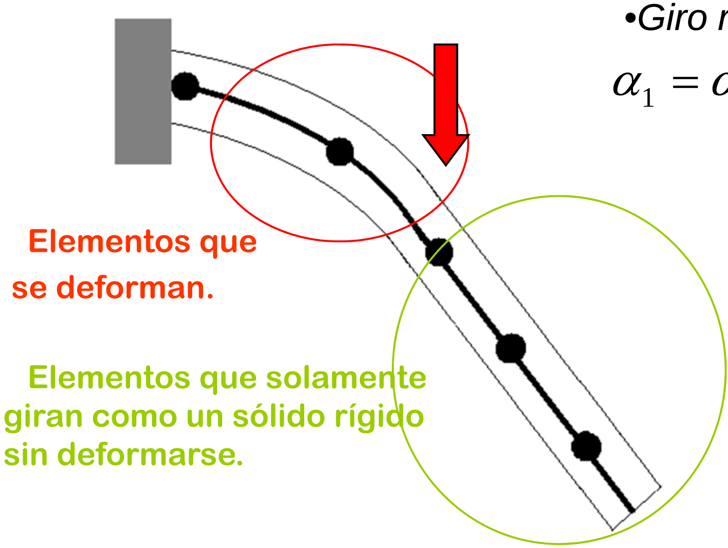
$$Cor\tan te -> Q = -EI \frac{\partial^3 v(x)}{\partial^3 x} = -EI6d$$ → Constante.

## . Campo de desplazamiento.



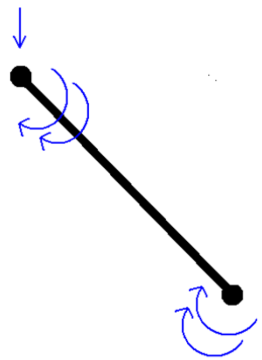
# 4. Formulación del elemento de viga.

## •Movimiento rígido.



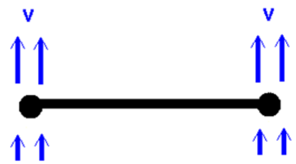

•*Giro rígido:*

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha^* \Rightarrow \alpha^* = \frac{v_2 - v_1}{L}$$



•*Desplazamiento rígido:*

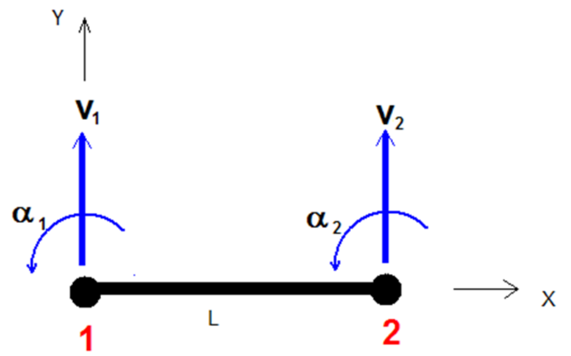
$$v_1 = v_2 = v$$



## 4. Formulación del elemento numérico.

• **Condiciones de contorno:**

$$\boxed{v(x) = a + bx + cx^2 + dx^3}$$




$$v(x=0) = v_1$$

$$v(x=L) = v_2$$

$$\alpha(x=0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x=0) = \alpha_1$$

$$\alpha(x=L) = \frac{\partial v}{\partial x}(x=L) = \alpha_2$$

*•Matricialmente:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L & L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

# 4. Formulación del elemento de numérico.

## •Funciones de interpolación. Polinomios de Hermite.

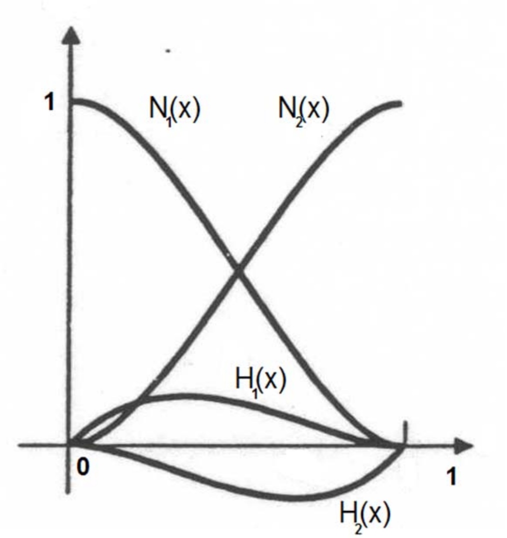
**Estos polinomios permiten interpolar el campo de desplazamiento de un elemento respecto de otro.**

$$v(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

$$v(x) = v_1 + \alpha_1 x + \left[\frac{1}{L}(\alpha_2 + 2\alpha_1) + \frac{3}{L^2}(v_2 - v_1)\right]x^2 + \left[\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{L^2} - \frac{2}{L^3}(v_2 - v_1)\right]x^3$$

$$v(x) = \left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]v_1 + \left[x\left(\frac{x}{L} - 1\right)^2\right]\alpha_1 + \left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]v_2 + \left[\frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right)\right]\alpha_2$$

## 4. Formulación del elemento numérico.




$$N_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$H_1(x) = x\left(\frac{x}{L} - 1\right)^2$$

$$N_2(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$H_2(x) = \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} N_1(x=0)=1 \\ H_1(x=0)=0 \\ N_2(x=0)=0 \\ H_2(x=0)=0 \\ \\ \Rightarrow v(x=0)=v_1 \end{array}\right.$$

$$\boxed{v(x) = N_1(x)v_1 + H_1(x)\alpha_1 + N_2(x)v_2 + H_2(x)\alpha_2}$$

**Representación vectorial:** $$\bar{v} = \begin{bmatrix} N_1(x) & H_1(x) & N_2(x) & H_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \alpha_1 \\ v_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

## 5. Obtención de la matriz B.

• **Campo de deformaciones:**

$$\varepsilon = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = -y\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = B\bar{v}$$

$$\varepsilon = -y\begin{bmatrix} N''_1(x) & H''_1(x) & N''_2(x) & H''_2(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ \alpha_1 \\ v_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{B = -y\begin{bmatrix} N''_1(x) & H''_1(x) & N''_2(x) & H''_2(x) \end{bmatrix}}$$

• **Campo de tensiones:**

$$\sigma = D\varepsilon = E.\left(-y\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2}\right)$$

$$\sigma = E\left(-y\begin{bmatrix} N''_1(x) & H''_1(x) & N''_2(x) & H''_2(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ \alpha_1 \\ v_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow \boxed{D = E}$$

## 6. Matriz de rigidez

**•Matriz de Rigidez [K].**

**Matriz B:** $B = -y\left[N''_1(x) \quad H''_1(x) \quad N''_2(x) \quad H''_2(x)\right]$

**Matriz D:** $D = E$

$$[K] = \int_V [B]^T [D][B] dV = E\left(\int_0^L \begin{bmatrix} N''_1(x) \\ H''_1(x) \\ N''_2(x) \\ H''_2(x) \end{bmatrix} \left[N''_1(x) \quad H''_1(x) \quad N''_2(x) \quad H''_2(x)\right] dx\right)\left(\int_S y^2 dydz\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{[K] = EI_z\left(\int_0^L \begin{bmatrix} N''_1(x) \\ H''_1(x) \\ N''_2(x) \\ H''_2(x) \end{bmatrix} \left[N''_1(x) \quad H''_1(x) \quad N''_2(x) \quad H''_2(x)\right] dx\right)}$$

## 6. Matriz de rigidez

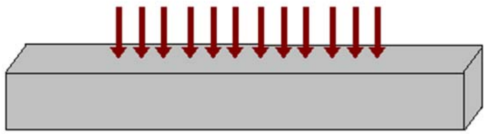
**•Matriz de Rigidez [K].**

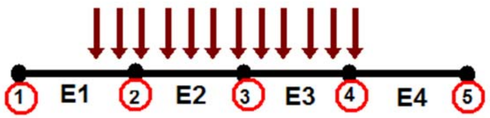
$$[K] = EI_z \begin{bmatrix} \int_0^L N_1(x)'' N_1(x)'' dx & \int_0^L N_1(x)'' H_1(x)'' dx & \int_0^L N_1(x)'' N_2(x)'' dx & \int_0^L N_1(x)'' H_2(x)'' dx \\ & \int_0^L H_1(x)'' H_1(x)'' dx & \int_0^L H_1(x)'' N_2(x)'' dx & \int_0^L H_1(x)'' H_2(x)'' dx \\ simétrica & & \int_0^L N_2(x)'' N_2(x)'' dx & \int_0^L N_2(x)'' H_2(x)'' dx \\ & & & \int_0^L H_2(x)'' H_2(x)'' dx \end{bmatrix} = EI_z \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ sim & & k_{33} & k_{34} \\ & & & k_{44} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[K] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ simétrica & & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix}}$$

# 7. Caso de las cargas distribuidas.

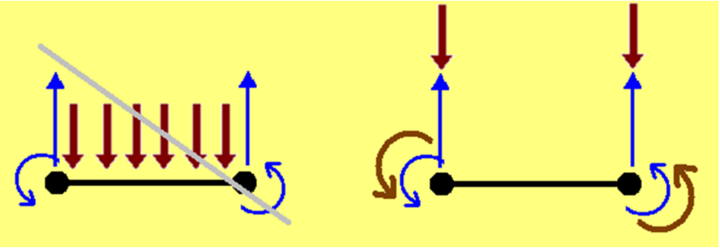
- **Caso de las cargas distribuidas.**



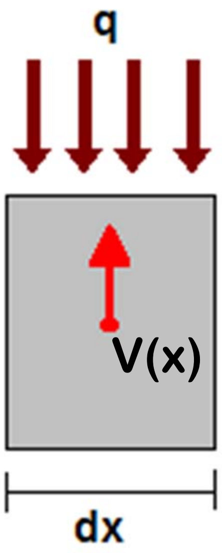
# 7. Caso de las cargas distribuidas.

**•Caso de las cargas distribuidas: cargas aplicadas en los nodos:**



*•Trabajo de las Cargas distribuidas:*

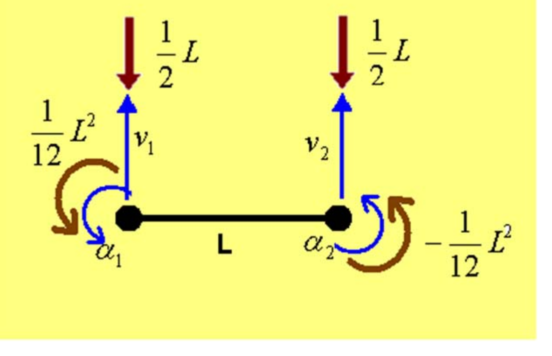
$$W_q = \int_0^L q v(x) dx$$



## 7. Caso de las cargas distribuidas.

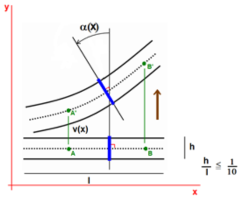
•**Caso de las cargas distribuidas: cargas aplicadas en los nodos:**

$$\overline{W_q} = [v_1 \quad \alpha_1 \quad v_2 \quad \alpha_2]\, q \begin{bmatrix} \int_0^L N_1(x)dx \\ \int_0^L H_1(x)dx \\ \int_0^L N_2(x)dx \\ \int_0^L H_2(x)dx \end{bmatrix} = [v_1 \quad \alpha_1 \quad v_2 \quad \alpha_2]\, q \begin{bmatrix} \frac{1}{2}L \\ \frac{1}{12}L^2 \\ \frac{1}{2}L \\ -\frac{1}{12}L^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\overline{F_q} = q \begin{bmatrix} \frac{1}{2}L \\ \frac{1}{12}L^2 \\ \frac{1}{2}L \\ -\frac{1}{12}L^2 \end{bmatrix}}$$

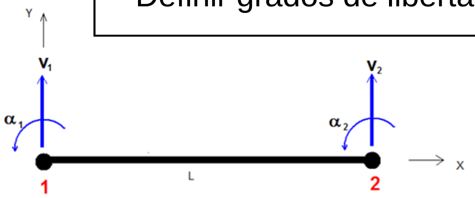


## 5. Resumen

Caracterizar esfuerzos que actúan sobre la estructura



Proponer tipo de elemento. Definir grados de libertad




Proponer un campo de desplazamiento

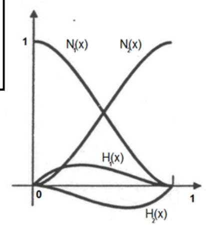
$$v(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Aplicar condiciones de contorno para obtener los coeficientes

$$v(x=0) = v_1$$
$$v(x=L) = v_2$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(x=0) = \alpha_1$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(x=L) = \alpha_2$$

Definir matriz [B]
Definir matriz constitutiva [D]

Obtener polinomios de interpolación




Energía de deformación interna

$$E = \frac{1}{2}\int_V \sigma^T \varepsilon \, dV$$

Definir matriz de rigidez [K]

$$[K] = \int_V [B]^T [D][B] dV$$