Triángulo plano: Axisimetría

Viana L. Guadalupe Suárez
Carmelo Militello Militello
Departamento de Ingeniería Industrial
Área de Mecánica

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Civil e Industrial
Universidad de La Laguna
Tenerife, España

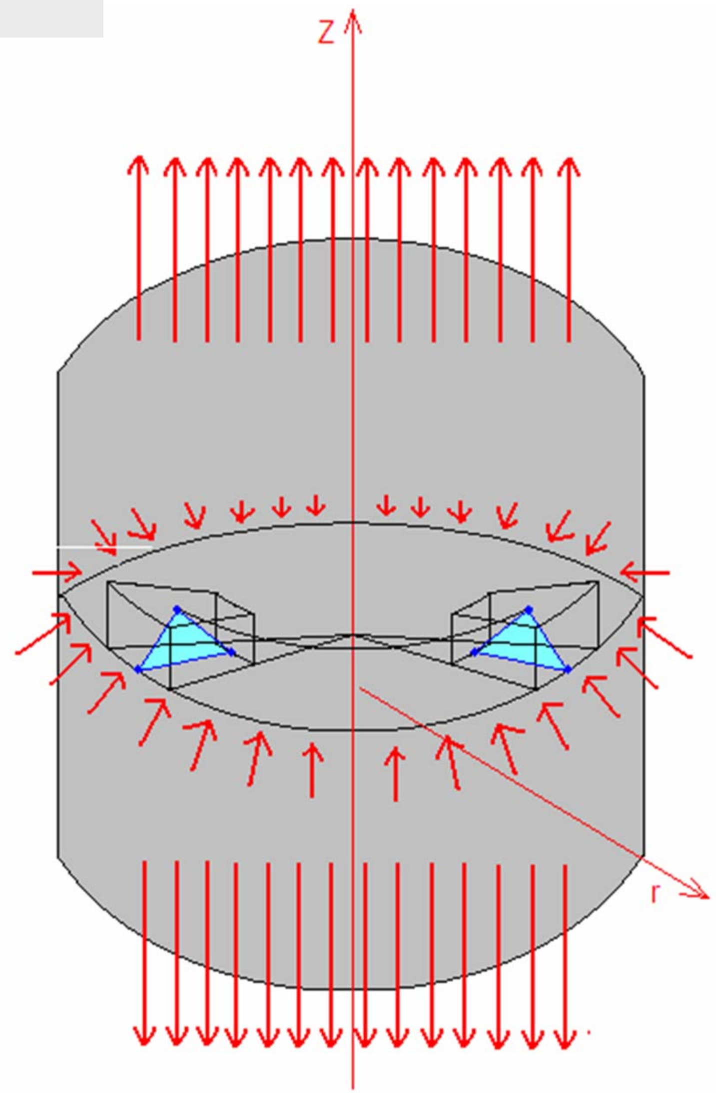
2. Características del sólido axisimétrico.

1. Son estructuras con simetría de revolución.
2. Las cargas aplicadas tienen simetría de revolución.
3. Por simetría el estado de deformación y de tensión de una sección plana cualquiera perpendicular al eje de simetría del cuerpo viene definido por las componentes de desplazamiento u y v.
4. r y z son las coordenadas radial y axial de un punto siendo u y v los desplazamientos correspondientes.

$$u(x,z) = u(r,z)$$
$$v(x,z) = v(r,z)$$

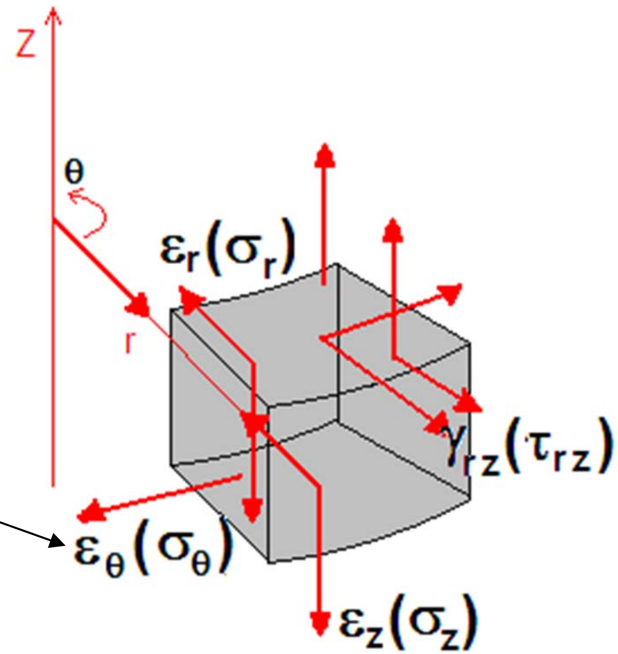
5. El desplazamiento radial induce a una deformación circunferencial asociada al giro de revolución del cuerpo:

$$\varepsilon_\theta = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}$$



2. Características del sólido axisimétrico.

6. **Se tendrá en cuenta todas las deformaciones y tensiones asociadas a un sólido.**
7. **Las deformaciones no serán constantes dentro del elemento como ocurría en los casos de tensión o deformación plana. Esto es debido al término de la deformación circunferencial.**

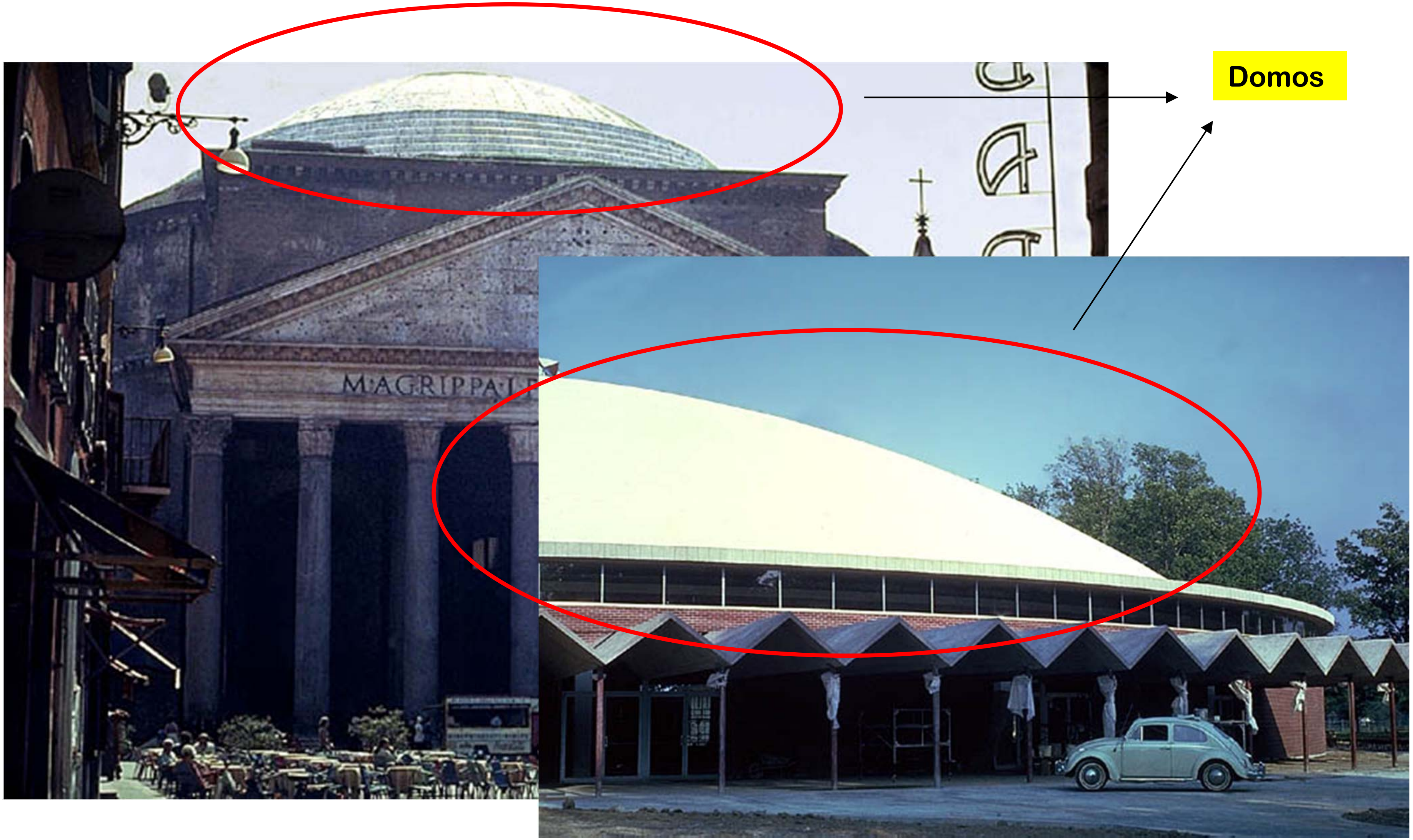


8. **Para obtener la matriz de rigidez del elemento se evalúa la matriz [B] en el centro de gravedad del elemento.**
9. **r_{CG} y z_{CG} son las coordenadas del centro de gravedad del elemento triangular.**

$$[B]=[B\ (r,z)]=[B\ (r_{CG},z_{CG})]\begin{cases} r_{CG}=\dfrac{r_1+r_2+r_3}{3} \\ z_{CG}=\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3} \end{cases}$$

3. Ejemplos de estructuras axisimétricas.

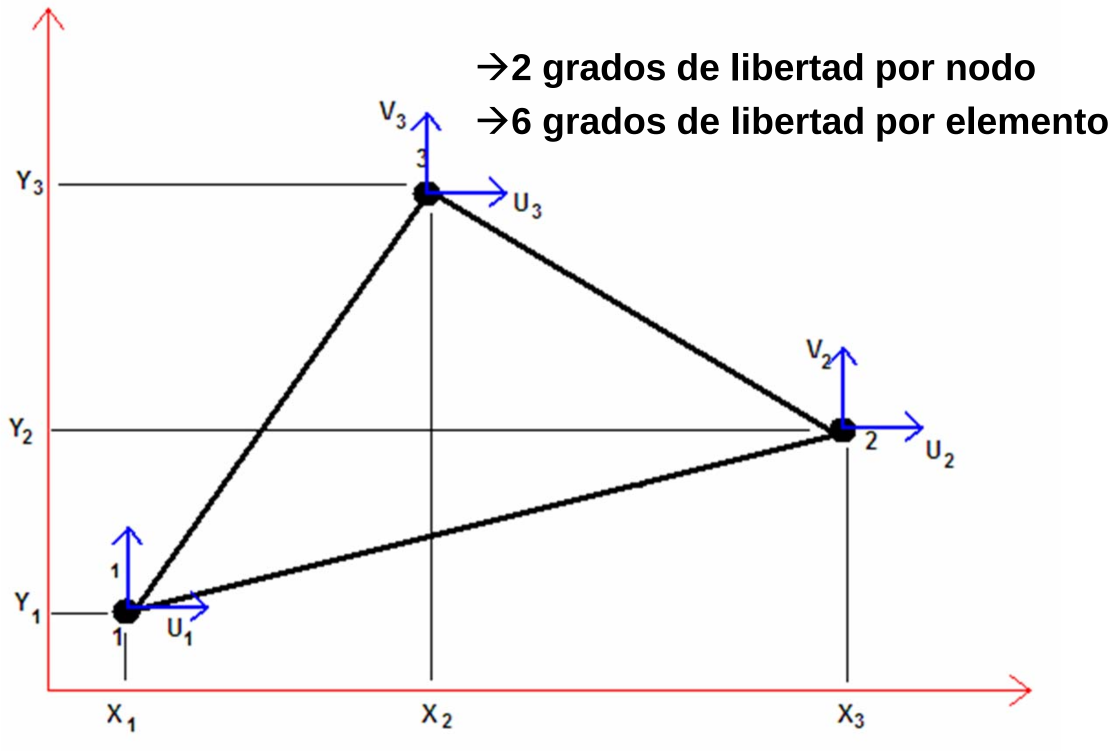
3. Ejemplos de estructuras axisimétricas.



Domos

4. Formulación del elemento de triangular.

- **Tipo de Elemento.**



•Campo de desplazamiento.

$$u(r,z) = N_1(r,z)u_1 + N_2(r,z)u_2 + N_3(r,z)u_3$$

$$v(r,z) = N_1(r,z)v_1 + N_2(r,z)v_2 + N_3(r,z)v_3$$

->Funciones de forma: coordenadas de área $$N_i(r,z) = \frac{a_i + b_i r + c_i z}{2A}$$

5. Matriz de rigidez.

•Relación deformación-desplazamiento dentro del elemento.

$$\bar{\varepsilon}(r,z)=\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_z\\ \varepsilon_\theta\\ \gamma_{rz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial r} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{1}{r} & 0\\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}B_1 & B_2 & B_3\end{bmatrix}\bar{d}=[B]\bar{d}$$

La deformación ya no es constante dentro del elemento porque la matriz [B] depende de r y z.

•Matriz B.

$$B_{i_{(1,2,3)}}=B_i(r,z)=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial r} & 0\\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z}\\ \frac{1}{r}Ni & 0\\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_i & 0\\ 0 & c_i\\ \frac{a_i+b_i r+c_i z}{r} & 0\\ c_i & b_i\end{bmatrix}\Rightarrow \boxed{[B]=\begin{bmatrix}B_1 & B_2 & B_3\end{bmatrix}}$$

•Relación tensión-deformación dentro del elemento.

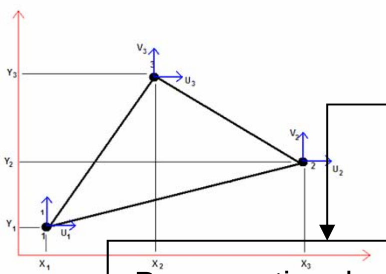
$$\overline{\sigma}(r,z)=\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_z\\ \sigma_\theta\\ \tau_{rz}\end{Bmatrix}=[D]\overline{\varepsilon}(r,z)$$

$$\boxed{[D]=\frac{E(1-\upsilon)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\begin{bmatrix}1 & \dfrac{\upsilon}{1-\upsilon} & \dfrac{\upsilon}{1-\upsilon} & 0\\ & 1 & \dfrac{\upsilon}{1-\upsilon} & 0\\ simetrica & & \dfrac{\upsilon}{1-\upsilon} & 0\\ & & & \dfrac{1-2\upsilon}{2(1-\upsilon)}\end{bmatrix}}$$

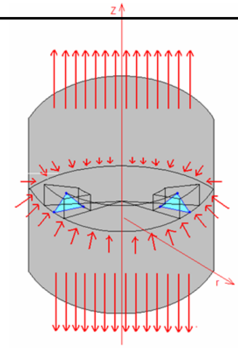
•Matriz de Rigidez [K].

$$[K]=\int_V [B]^T[D][B]dV=\int [B]^T[D][B](2\pi r dr dz)\Big|_{CG}\Rightarrow \boxed{[K]=2\pi A r_{CG}[B]^T[D][B]}$$

6. Resumen



Caracterizar esfuerzos que actúan sobre la estructura



Proponer tipo de elemento. Definir grados de libertad

Proponer un campo de desplazamiento

$$u(r,z) = N_1(r,z)u_1 + N_2(r,z)u_2 + N_3(r,z)u_3$$
$$v(r,z) = N_1(r,z)v_1 + N_2(r,z)v_2 + N_3(r,z)v_3$$

Aplicar condiciones de contorno para obtener los coeficientes

Definir matriz de forma [B]
Definir matriz constitutiva [D]

Obtener polinomios de interpolación

$$N_i(r,z) = \frac{a_i + b_i r + c_i z}{2A}$$

Energía de deformación interna

Definir matriz de rigidez [K]

$$[K] = 2\pi A r_{CG} [B]^T [D][B]$$