Fundamentos matemáticos

Grado en Ingeniería agrícola y del medio rural

Tema 2
Matrices y ecuaciones lineales

José Barrios García

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de La Laguna

jbarrios@ull.es

2017

Índice

Tema 2. Matrices y ecuaciones lineales

Matrices

Una *matriz* A de orden $m \times n$ es una tabla de $m \times n$ números reales dispuestos en m filas y n columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Suele representarse abreviadamente por $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$, o simplemente $A = \left(a_{ij}\right)$.

Los números a_{ij} son los *elementos* de la matriz. El elemento a_{ij} ocupa la fila i y la columna j. Dos matrices del mismo orden son iguales si tienen los mismos elementos en cada posición.

Ejemplos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \mathrm{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Algunos tipos de matrices

- Matriz fila: solo tiene una fila.
- Matriz columna: solo tiene una columna.
- Matriz cero o matriz nula: todos sus elementos son cero. Se representa por O.
- Matriz cuadrada: tiene el mismo número de filas que de columnas. Los elementos $a_{11}, a_{22} \dots, a_{nn}$ forman la diagonal de la matriz.

Los siguientes tipos de matrices cuadradas reciben una denominación especial.

- Matriz triangular: Todos los elementos por debajo (o por encima) de la diagonal son cero.
- Matriz diagonal: Todos los elementos que no están en la diagonal son cero.
- Matriz unidad: Matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal son la unidad. Se suele denominar I o I_n, para indicar que tiene orden n.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Suma y producto por un escalar

La suma de dos matrices de la misma dimensión A y B se obtiene sumando los elementos que ocupan la misma posición en las dos matrices.

$$A + B = \left(a_{ij}\right) + \left(b_{ij}\right) = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

El producto de una matriz A por un número real $\lambda \in \mathbb{R}$ se obtiene multiplicando cada elemento de la matriz por dicho número.

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot (a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$$

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Producto de matrices

Dos matrices A y B son *multiplicables,* en este orden, si el número de columnas de A coincide con el número de filas de B.

Si A y B son multiplicables, su producto es la matriz $C = A \cdot B$ dada por

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

Es decir, el elemento c_{ij} de la matriz C es la suma de los productos, término a término, de la fila i de la matriz A por la columna j de la matriz B.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 \\ 4 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 4 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 12 & 22 \\ 14 & 30 \end{pmatrix}$$

Nota

- Si A es de orden $m \times p$ y B es de orden $p \times n$, entonces C es de orden $m \times n$.
- En general, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Determinantes

El *determinante* de una matriz cuadrada de orden n es un número que refleja ciertas propiedades de la matriz y se obtiene de la matriz siguiendo un procedimiento determinado.

Notación. El determinante de la matriz A se escribe $|A|$ o $\det(A)$.

El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ se escribe $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Determinante de una matriz de orden 2 o 3

El determinante de una matriz de orden 2 o 3 se calcula de la siguiente manera.

Matriz 2×2. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Matriz 3×3. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Ejemplos

- $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$.

- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -5 + 12 + 18 = 25.$

Este proceso se generaliza para determinantes de orden n de la siguiente manera.

Adjunto de un elemento

Sea A un determinante de orden n, y sea a_{ij} un elemento de A.

Llamaremos *menor complementario* de a_{ij} al determinante de orden $n-1$ que resulta al eliminar la fila y la columna de a_{ij}. Lo denotaremos por α_{ij}.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -3 \\ \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = +5 \end{array}$$

Llamaremos *adjunto* de a_{ij} al menor complementario precedido de un signo positivo o negativo según sea par o impar la suma $i+j$. Lo denotaremos por A_{ij}, con $A_{ij} = (-1)^{i+j}\,\alpha_{ij}$.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} A_{21} = (-1)^{2+1}\,\alpha_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = +3 \\ A_{33} = (-1)^{3+3}\,\alpha_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = +5 \end{array}$$

Nota. En la práctica, los signos del adjunto se alternan de la siguiente manera

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

Determinante de una matriz de orden n

El determinante de una matriz cuadrada de orden n se calcula sumando el producto de todos los elementos de una fila (o columna) por sus respectivos adjuntos. Este valor no depende de la fila o columna por la que se desarrolle.

Ejemplos. Calcular el siguiente determinante desarrollándolo por la primera fila.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -28$$

Desarrollar el mismo determinante por la tercera columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = +3 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -28$$

Desarrollar el siguiente determinante por la tercera columna (aprovechando que tiene dos ceros).

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = +3 \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = [\text{ejercicio}]$$

Calcular el siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

Propiedades de los determinantes

1. $|I_n| = 1$.
2. Si A es una matriz triangular de orden n, entonces $|A| = a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn}$.
3. Si intercambiamos dos filas entre sí, el determinante cambia de signo.
4. Si multiplicamos una fila por un número λ, el determinante queda multiplicado por λ.
5. Si a una fila le sumamos una combinación lineal de las demás, el determinante no varía.

Determinante nulo

6. Si A tiene una fila de ceros, entonces $|A| = 0$.
7. Si A tiene dos filas iguales o proporcionales, entonces $|A| = 0$.
8. En general, si una fila es combinación lineal de otras filas, entonces $|A| = 0$.

Nota. Si $F_1, F_2, \dots, F_n$ son filas de un determinante, una *combinación lineal* de $F_1, F_2, \dots, F_n$ es una expresión del tipo $\lambda_1 F_1 + \lambda_2\, F_2 + \cdots + \lambda_n F_n$, con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ números reales, denominados *coeficientes* de la combinación.

Nota: todo lo dicho para filas es válido también para columnas.

Cálculo práctico de determinantes

En la práctica para calcular un determinante utilizamos las propiedades para transformar en ceros el mayor número posible de elementos de una fila o una columna, y después desarrollamos el determinante por esa fila o esa columna.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

Método de Gauss

Utiliza las propiedades de los determinantes para reducirlo a un determinante triangular superior.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) \cdot 3 = 6.$$

Menores de una matriz

Llamaremos *menor de orden* n de una matriz A, al determinante formado por la intersección de n filas y n columnas de la matriz A.

Ejemplo. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ tiene 4 menores de orden 3 que son

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \; M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \; M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \; M_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Algunos menores de orden dos son

$$N_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \; N_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \; N_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Los menores de orden 1 están formados por los propios elementos de la matriz.

Rango de una matriz

Las filas (o las columnas) de una matriz se dicen *linealmente independientes*, si ninguna de ellas puede escribirse como combinación lineal de las demás. En caso contrario, las filas (o las columnas) se dicen *linealmente dependientes*.

Teorema 1. *En una matriz, el número de filas linealmente independientes es igual al número de columnas linealmente independientes.*

Este número se denomina *rango* de la matriz, y será muy importante a lo largo del tema. El siguiente teorema nos proporciona un método para calcular el rango utilizando los menores de la matriz.

Teorema 2. *El rango de una matriz coincide con el orden máximo de sus menores no nulos. En particular, si A es una matriz cuadrada de orden n, entonces $rango\, A = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$.*

Ejemplos

- La matriz unitaria I_n tiene rango n (su determinante es distinto de cero).
- La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tiene rango 3 (su determinante es distinto de cero).

Matrices equivalentes

Diremos que dos matrices son *equivalentes*, y lo escribiremos $A \sim B$, si tienen el mismo rango. Las siguientes transformaciones proporcionan matrices equivalentes.

1. Cambiar el orden de las filas.
2. Multiplicar una fila por un número distinto de cero
3. Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un número.
4. Suprimir una fila que sea combinación lineal de las demás.

Estas propiedades son igualmente válidas sustituyendo filas por columnas.

Cálculo del rango de una matriz

Para calcular el rango de una matriz podemos utilizar varios métodos. En este curso veremos el *método de Gauss-Jordan* y el *método de los menores no nulos*. Cada uno tiene sus ventajas e inconvenientes, así que la elección dependerá de cada caso particular.

Método de Gauss-Jordan

El método de Gauss-Jordan utiliza las propiedades del rango para transformar la matriz en una matriz equivalente a una matriz unidad I_n. El rango de la matriz unidad es el rango buscado.

Ejemplo. Determinar el rango de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango}\, A = 3.$$

Método de los menores no nulos

Según el teorema anterior, el rango de una matriz es el orden máximo de sus menores no nulos. Para calcularlo, inspeccionamos la matriz tratando de descubrir un menor no nulo de orden máximo.

Ejemplo. Determinar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- La matriz tiene 3 filas y cuatro columnas, por tanto, su rango es ≤ 3.
- Inspeccionando la matriz vemos que tiene un menor no nulo de orden 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

- Por tanto, rango $A = 3$.

A menudo es más fácil calcular el rango si utilizamos sus propiedades para anular los elementos que están bajo la diagonal.

Ejemplo. Determinar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 16 \end{pmatrix}$.

- La matriz tiene 3 filas y cuatro columnas, por tanto, su rango es ≤ 3.
- Utilizamos las propiedades del rango para anular los elementos bajo la diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 4 & 13 & 21 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 45 & 45 \end{pmatrix}$$

- La última matriz tiene un menor no nulo de orden tres: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 45 \end{vmatrix} \neq 0.$
- Por tanto, rango $A = 3$.

Ejercicio. Demostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 6 \\ 3 & -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ tiene rango 2.

Sistemas de ecuaciones lineales

Una *ecuación lineal* con n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ es una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

Donde $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ son números reales.

Un *sistema de* m *ecuaciones lineales con* n *incógnitas* (en adelante, un *sistema lineal*) es una colección de ecuaciones lineales de la forma

$$\left.\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots & = \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right\}$$

Si $b_1, b_2, \ldots, b_m = 0$, el sistema se dice *homogéneo*.

Expresión matricial

Un sistema lineal puede escribirse en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

O de forma reducida, como

$$A \cdot X = B$$

Donde A es la matriz de los coeficientes, X es la matriz de las incógnitas, y B es la matriz de los términos independientes. El sistema es *homogéneo* cuando $B = 0$.

Ejemplo

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - 4z = 3 \\ 3x - 4y + 5z = 2 \\ 4x + 5y + 6z = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Clasificación de los sistemas

Diremos que n números reales ordenados $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ son una *solución* del sistema si satisfacen todas las ecuaciones del sistema. *Resolver* un sistema es determinar todas sus soluciones.

Un sistema de ecuaciones lineales puede no tener solución (*sistema incompatible*), tener una única solución (*sistema compatible determinado*) o tener infinitas soluciones (*sistema compatible indeterminado*)

Los sistemas homogéneos admiten siempre la solución trivial $(0, 0, \ldots, 0)$, por tanto, son siempre sistemas compatibles (determinados o indeterminados).

Ejemplos

Sistema compatible determinado $\left.\begin{array}{r} x - y - z = 0 \\ y - z = 1 \\ z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{solución única } (3, 2, 1).$

Sistema compatible indeterminado $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \\ 0 \cdot z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{infinitas soluciones } (2z, -z, z), z \in \mathbb{R}.$

Sistema incompatible $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ y - z = 0 \\ 0 \cdot z = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{no tiene solución.}$

Resolución de sistemas

El método general consiste en transformar el sistema en otro más sencillo que conserve las mismas soluciones. Uno de los métodos más efectivos es el *método de Gauss-Jordan*, y es el que estudiaremos en este curso.

Sistemas equivalentes

Dos sistemas son *equivalentes* si admiten las mismas soluciones, es decir, si toda solución del primero es solución del segundo y viceversa. Las siguientes transformaciones proporcionan sistemas equivalentes.

1. Cambiar el orden las ecuaciones.
2. Multiplicar una ecuación por un número distinto de cero.
3. Sumarle a una ecuación otra ecuación multiplicada por un número.
4. Suprimir una ecuación del sistema que sea combinación lineal de las demás.

Matriz escalonada reducida

Las transformaciones que proporcionan sistemas equivalentes pueden hacerse más cómodamente utilizando la *matriz ampliada* A^*.

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

En la matriz ampliada, llamaremos *diagonal del sistema* a la línea $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ que une los coeficientes con subíndices iguales. Llamaremos *pivote* de una fila, al primer elemento no nulo de la fila. La matriz ampliada está en forma *escalonada reducida* cuando:

a) Todas las filas nulas se encuentran por debajo de las filas no nulas.
b) El pivote de cada fila no nula es igual a 1.
c) El pivote de cada fila no nula se encuentra a la derecha del pivote de la fila anterior.
d) Si una columna contiene un pivote, entonces todos los demás elementos son nulos.

Ejemplos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Método de Gauss-Jordan

Consiste en transformar el sistema en otro equivalente cuya matriz ampliada sea una matriz escalonada reducida. De esta forma se obtiene un sistema equivalente al original, en su forma más simple posible. Se pueden presentar tres casos principales.

Sistema determinado

$$\left.\begin{array}{r} x - y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 4z = 4 \\ 5x - y + 3z = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 4 & 13 & 21 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -8 & -6 \\ 0 & 4 & 13 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -10 & -7\\ 0 & 1 & -8 & -6\\ 0 & 0 & 45 & 45\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -10 & -7\\ 0 & 1 & -8 & -6\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x=3\\ y=2\\ z=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow \text{solución } (3,2,1).$$

Sistema indeterminado

$$\left.\begin{aligned}x-y+3z&=4\\ 2x-y-z&=6\\ 3x-2y+2z&=10\end{aligned}\right\}\Rightarrow A^*=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 4\\ 2 & -1 & -1 & 6\\ 3 & -2 & 2 & 10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 4\\ 0 & 1 & -7 & -2\\ 0 & 1 & -7 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -7 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}x-4z&=2\\ y-7z&=-2\\ 0\cdot z&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}x&=4z+2\\ y&=7z-2\\ z&\in\mathbb{R}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \text{solución } (4z+2,7z-2,z), z\in\mathbb{R}.$$

Sistema incompatible

$$\left.\begin{aligned}2x-y+3z&=6\\ 4x-2y+6z&=9\\ x-y+z&=3\end{aligned}\right\}\Rightarrow A^*=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 6\\ 4 & -2 & 6 & 9\\ 1 & -1 & 1 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 3 & 6\\ 4 & -2 & 6 & 9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & -3\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{aligned}x+2z&=3\\ y+z&=0\\ 0\cdot z&=-3\end{aligned}\right\}\Rightarrow \text{no tiene solución.}$$

Teorema de Rouché-Frobenius

Si queremos saber de qué tipo es un sistema sin necesidad de resolverlo, el teorema de Rouché-Frobenius proporciona un método eficaz para clasificar los sistemas utilizando los rangos de la matriz A y la matriz ampliada A^*.

Teorema 3. *Sea S un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, entonces*

- S es compatible determinado $\Leftrightarrow$ rango $A=$ rango $A^*=n$.
- S es compatible indeterminado $\Leftrightarrow$ rango $A=$ rango $A^*<n$.
- S es incompatible $\Leftrightarrow$ rango $A\neq$ rango A^*.

En el caso particular de los sistemas homogéneos se tiene que

- Todos los sistemas homogéneos son compatibles (rango $A=$ rango A^*).
- Si rango $A=n$, el sistema está determinado (solo admite la solución trivial $X=0$).
- Si rango $A<n$, el sistema está indeterminado (admite infinitas soluciones).

Ejemplo. Clasificar los siguientes sistemas.

$$\left.\begin{aligned}2x-3y+z&=11\\ x+5y+3z&=-15\\ 4x-y-4z&=30\end{aligned}\right\}. \text{ En este caso, rango } A=\text{rango } A^*=3\Rightarrow \text{SCD.}$$

$$\left.\begin{aligned}x-y+z&=0\\ 2x+3y-2z&=0\\ 4x+y&=0\end{aligned}\right\}. \text{ En este caso, rango } A=\text{rango } A^*=2<3\Rightarrow \text{SCI.}$$

$$\left.\begin{aligned}2x-y&=-1\\ x+2y&=2\\ 3x+y&=0\end{aligned}\right\}. \text{ En este caso, rango } A=2<\text{rango } A^*=3\Rightarrow \text{SI.}$$

Discusión de sistemas

Dado un sistema con parámetros en los coeficientes, discutir el sistema consiste en clasificar el sistema según los valores de los parámetros.

Ejemplo. Discutir el siguiente sistema en función del parámetro k, utilizando el teorema de R-F.

$$\left.\begin{aligned} x-y+2z&=3\\ kx+5y-4z&=1\\ 3x+2y-z&=1 \end{aligned}\right\}$$

En este caso calcularemos conjuntamente los rangos de A y A^* utilizando el método de Gauss-Jordan. Por comodidad en los cálculos, primero reordenamos con cuidado las filas y columnas del sistema, para que el parámetro intervenga en el menor número de cálculos posible.

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3\\ k & 5 & -4 & 1\\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & -1 & 1\\ k & 5 & -4 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 3 & 1\\ 5 & -4 & k & 1 \end{array}\right)$$

A continuación aplicamos el método de Gauss-Jordan.

$$A^*\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 3 & 1\\ 5 & -4 & k & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -3\\ 2 & -1 & 3 & 1\\ 5 & -4 & k & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -3\\ 0 & 3 & 5 & 7\\ 0 & 6 & k+5 & 16 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 5 & 7\\ 0 & 6 & k+5 & 16 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 7\\ 0 & 2 & k+5 & 16 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 7\\ 0 & 0 & k-5 & 2 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & k-5 & 2 \end{array}\right).$$

Caso $k\neq 5$.

- $A^*\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow\left.\begin{array}{r}\text{rango } A=3\\ \text{rango } A^*=3\end{array}\right\}\Rightarrow SCD.$

Caso $k=5$.

- $A^*\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow\left.\begin{array}{r}\text{rango } A=2\\ \text{rango } A^*=3\end{array}\right\}\Rightarrow \text{SI}.$

Ejemplo. Discutir el siguiente sistema y resolverlo cuando sea posible.

$$\left.\begin{aligned} x+y-6z&=0\\ x-2y+6z&=0\\ 3x-y+mz&=0 \end{aligned}\right\}$$

Como nos piden las soluciones, resolveremos directamente el sistema utilizando el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 0\\ 1 & -2 & 6 & 0\\ 3 & -1 & m & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 0\\ 0 & -3 & 12 & 0\\ 0 & -4 & m+18 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 0\\ 0 & -4 & m+18 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 0\\ 0 & 0 & m+2 & 0 \end{pmatrix}\overset{m\neq -2}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Caso $m\neq -2$. El sistema queda

$$x=y=z=0\Rightarrow \text{solución } (0,0,0)\Rightarrow \text{SCD}.$$

Caso $m=-2$. El sistema queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-2z=0 \\ y-4z=0 \\ 0\cdot z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2z \\ y=4z \\ z\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{solución } (2z,4z,z), z\in\mathbb{R} \Rightarrow \text{SCI.}$$

Ejemplo. Discutir el siguiente sistema y resolverlo cuando sea posible.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y+z=1 \end{array}\right\}$$

Como nos piden las soluciones, resolveremos directamente el sistema utilizando el método de Gauss-Jordan.

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \overset{a\neq 1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+a & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 & 1 \end{array}\right) \overset{a\neq -2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/(a+2) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/(a+2) \\ 0 & 1 & 0 & 1/(a+2) \\ 0 & 0 & 1 & 1/(a+2) \end{array}\right)$$

Caso $a\neq 1$ y $a\neq -2$. El sistema queda

- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/(a+2) \\ 0 & 1 & 0 & 1/(a+2) \\ 0 & 0 & 1 & 1/(a+2) \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x=1/(a+2) \\ y=1/(a+2) \\ z=1/(a+2) \end{array} \Rightarrow \text{SCD.}$$

Caso $a=1$. El sistema queda

- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 0\cdot y=0 \\ 0\cdot z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-y-z+1 \\ y\in\mathbb{R} \\ z\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{SCI.}$$

Caso $a=-2$. El sistema queda

- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-z=1 \\ y-z=0 \\ 0\cdot z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{SI.}$$