

Fundamentos matemáticos

Grado en Ingeniería agrícola y del medio rural

Tema 3 Geometría del plano y del espacio

José Barrios García

[Departamento de Análisis Matemático](#)

[Universidad de La Laguna](#)

jbarrios@ull.es

2017



[Licencia Creative Commons 4.0 Internacional](#)

Índice

Tema 3. Geometría del plano y del espacio	3
Vectores.....	3
Geometría del plano.....	8
Geometría del espacio	16

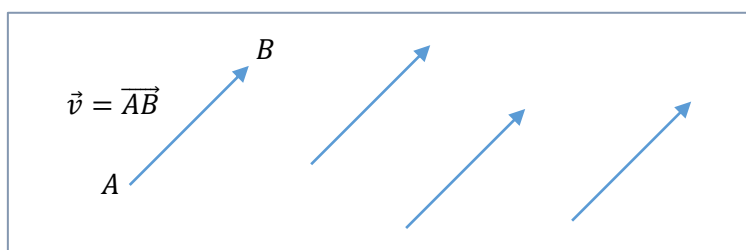
Tema 3. Geometría del plano y del espacio

Vectores

Para definir completamente ciertas magnitudes importantes como la *velocidad*, la *fuerza* o la *aceleración*, no basta con dar su valor numérico: es necesario especificar también su dirección. Estas magnitudes se denominan *magnitudes vectoriales* o, simplemente, *vectores*.

Por el contrario, otras magnitudes, como el *volumen* o la *temperatura*, no tienen ninguna dirección asociada con ellas, sólo tienen un valor numérico. Estas magnitudes se denominan *escalares*.

Geométricamente, los vectores se representan en el plano o en el espacio mediante segmentos orientados de recta, es decir, segmentos rectos que se recorren en un sentido determinado. Si el *punto inicial* de un vector $\vec{v}$ es A y el *punto final* es B , escribiremos $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

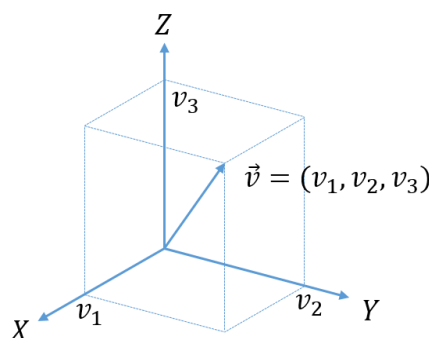


Segmentos orientados representando el mismo vector

Todos los segmentos orientados que tienen la misma longitud y dirección se consideran *equivalentes* y representan al mismo vector. En lo que sigue, identificaremos los vectores con sus representantes, sin hacer más distinciones que las estrictamente necesarias. Por brevedad, trabajaremos con vectores en el espacio. Las definiciones para vectores en el plano son análogas, sin más que considerar dos componentes en vez de tres.

Componentes de un vector

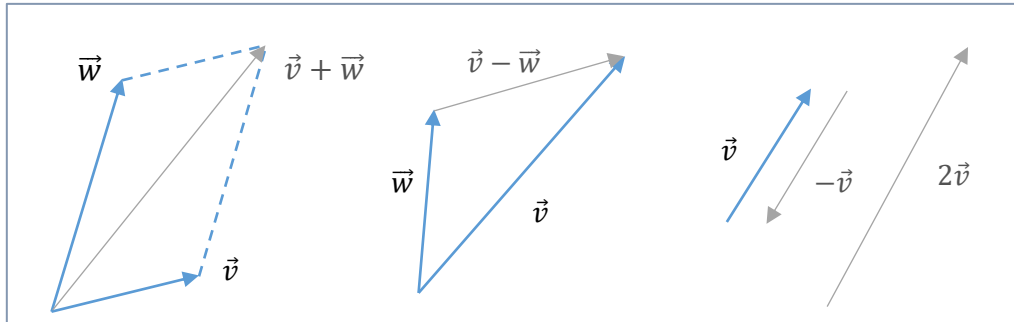
En el espacio real se definen los ejes cartesianos usuales, de forma que todo punto del espacio está determinado por sus coordenadas $P(x, y, z)$ respecto a dichos ejes. Las *componentes* de un vector $\vec{v}$ son las coordenadas (v_1, v_2, v_3) del punto final del representante del vector cuyo origen está situado en el origen de coordenadas. Vamos a identificar cada vector con sus componentes y escribiremos simplemente $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.



Operaciones básicas

Dados dos vectores $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$,

- La *suma* $\vec{v} + \vec{w}$ es el vector $\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$.
- El *producto* $\lambda \cdot \vec{v}$ es el vector $\lambda \cdot \vec{v} = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3)$.



Ejemplo. Dados los vectores $\vec{v} = (1, 2, 3)$ y $\vec{w} = (3, 2, 1)$,

- $\vec{v} + \vec{w} = (1, 2, 3) + (3, 2, 1) = (4, 4, 4)$.
- $\vec{v} - \vec{w} = (1, 2, 3) - (3, 2, 1) = (-2, 0, 2)$.
- $2\vec{v} - 3\vec{w} = 2 \cdot (1, 2, 3) - 3 \cdot (3, 2, 1) = (2, 4, 6) - (9, 6, 3) = (-7, -2, 3)$.

Norma

La *norma* $|\vec{v}|$ de un vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ es la longitud de cualquiera de sus representantes.

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Un vector es *unitario* si su norma es igual a 1. Si $\vec{v}$ es un vector no nulo, entonces $\vec{v}/|\vec{v}|$ es un vector unitario en la dirección de $\vec{v}$.

Ejemplo. Dado el vector $\vec{v} = (1, -1, 2)$, calcular su norma y un vector unitario en su dirección.

- $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$.
- $\vec{u} = \vec{v}/|\vec{v}| = (1, -1, 2)/\sqrt{6} = (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$.

Los vectores *canónicos* son los vectores unitarios paralelos a los ejes coordenados.

$$\vec{i} = (1, 0, 0) \quad \vec{j} = (0, 1, 0) \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

Todo vector puede escribirse como combinación lineal de los vectores canónicos.

Ejemplo. El vector $\vec{w} = (3, -2, 2)$ es el vector $\vec{w} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

Vector de posición

El *vector de posición* de un punto $P(x, y, z)$ es el vector $\overrightarrow{OP}$ que va del origen hasta el punto P .

$$\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$$

El vector de posición del origen de coordenadas es el vector nulo $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

El vector que va del punto $P(x_1, y_1, z_1)$ al punto $Q(x_2, y_2, z_2)$ es el vector

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

La *distancia* del punto P al punto Q es la norma del vector $\overrightarrow{PQ}$

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = d(Q, P)$$

Ejemplo. Dados $P(3, -1, 2)$ y $Q(-2, 1, -1)$, calcular el vector $\overrightarrow{PQ}$ y la distancia entre ambos puntos.

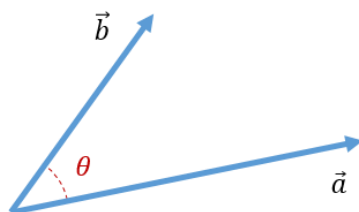
- $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (-2, 1, -1) - (3, -1, 2) = (-5, 2, -3).$
- $d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{38}.$

Producto escalar

El *producto escalar* $\vec{a} \cdot \vec{b}$ de dos vectores no nulos que forman un ángulo θ ($0 \leq \theta \leq \pi$), es el escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$$

Expresado en función de las componentes de los vectores, resulta $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

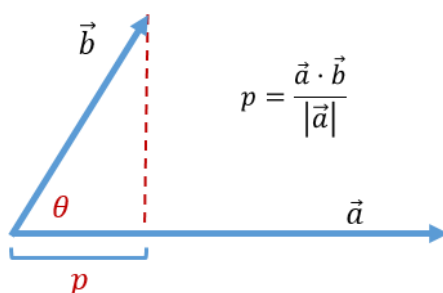


Ejemplo. Sean los vectores $\vec{a} = (1, 3, 2)$ y $\vec{b} = (-2, 0, 3)$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 3, 2) \cdot (-2, 0, 3) = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 = 4.$$

Aplicaciones

- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2.$
- El ángulo θ entre dos vectores ($0 \leq \theta \leq \pi$) viene dado por $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$
- Dos vectores son perpendiculares $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$
- La proyección p de un vector en la dirección definida por otro vector, viene dada por



Ejemplo. Determinar el ángulo entre los vectores $\vec{a} = (0, 1, 0)$ y $\vec{b} = (2, 2, 3)$.

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{17}} = \frac{2}{\sqrt{17}} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{17}}\right) \approx 60^\circ.98.$$

Ejemplo. Comprobar que los vectores $\vec{a} = (1, 2, 1)$ y $\vec{b} = (5, -3, 1)$ son perpendiculares.

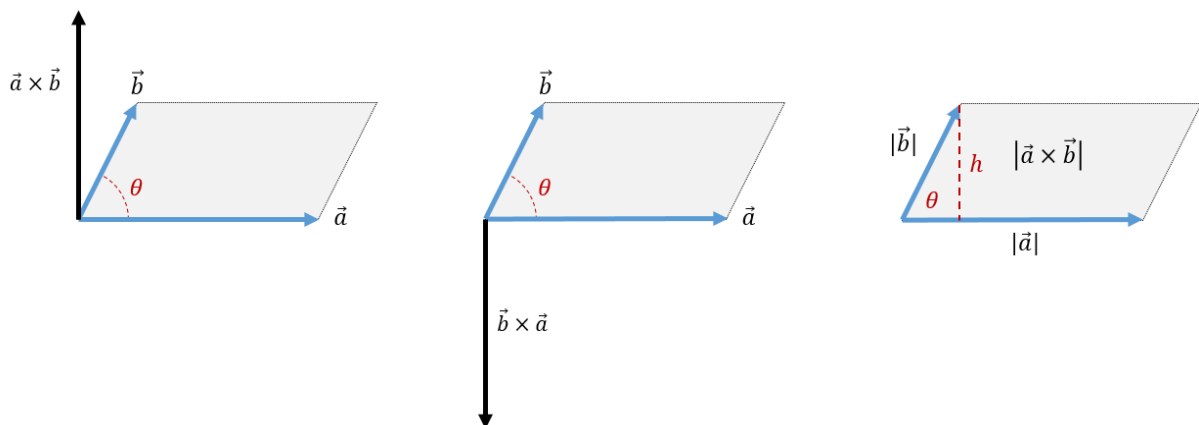
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Producto vectorial

El *producto vectorial* $\vec{a} \times \vec{b}$ de dos vectores que forman un ángulo θ ($0 \leq \theta \leq \pi$), es el vector

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta \cdot \vec{n}$$

Siendo $\vec{n}$ un vector unitario perpendicular al plano determinado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, cuyo sentido viene determinado por la regla del sacacorchos.



Expresado en función de sus componentes, resulta

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Ejemplo. Sean los vectores $\vec{a} = (1, 2, 0)$ y $\vec{b} = (2, 2, 3)$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = 6\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Aplicaciones

Como consecuencia de la definición, dos vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$, definen

- Un paralelogramo de área $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$.
- Un triángulo de área $A = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$.
- Los dos vectores son paralelos $\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Ejemplo. Calcular el área del triángulo de vértices $A(1, 0, 2)$, $B(3, 2, 0)$, $C(0, 4, 3)$.

- Los tres puntos definen dos vectores $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2, 2, -2) \\ \overrightarrow{AC} = (-1, 4, 1) \end{cases}$
- Los vectores determinan un triángulo de área

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} |10\vec{i} + 0\vec{j} + 10\vec{k}| = 5\sqrt{2} u^2.$$

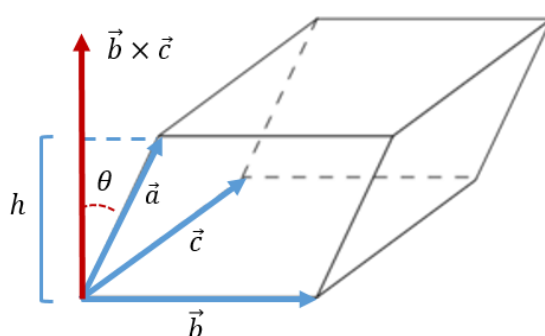
Producto mixto

El *producto mixto* $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ de tres vectores es el escalar definido por

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Expresado en función de sus componentes, resulta

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$



Producto mixto de tres vectores.

Ejemplo. Sean los vectores $\vec{a} = (1, -1, 1)$, $\vec{b} = (-2, 1, -3)$, $\vec{c} = (1, -3, -2)$.

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Aplicaciones

Como consecuencia de la definición, tres vectores no nulos $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, definen

- Un paralelepípedo de volumen $V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$.
- Un tetraedro de volumen $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$.
- Los tres vectores son coplanarios $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$.

Ejemplo. Calcular el volumen del paralelepípedo formado por los vectores dados.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} = (1, 2, 0) \\ \vec{b} = (2, 2, 3) \\ \vec{c} = (1, 3, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -7 \Rightarrow V = |-7| = 7 u^3.$$

Ejemplo. Verificar que los puntos $P(0, 1, 1)$, $Q(1, 0, 2)$, $R(1, -2, 0)$, $S(-2, 2, -2)$ son coplanarios. Efectivamente, son coplanarios porque definen tres vectores coplanarios.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (1, -1, 1) \\ \overrightarrow{PR} = (1, -3, -1) \\ \overrightarrow{PS} = (-2, 1, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

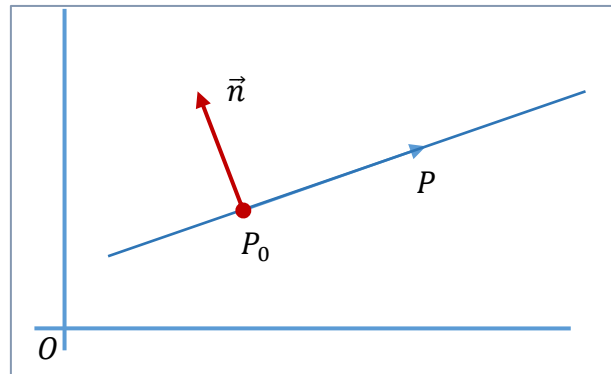
Geometría del plano

Ecuaciones de la recta

La recta puede definirse mediante vectores de dos formas diferentes:

- Dando un punto de la recta y un vector perpendicular a la recta.
- Dando un punto de la recta y un vector paralelo a la recta.

Ecuación general



Dado un punto $P_0(x_0, y_0)$ y un vector $\vec{n} = (a, b)$ perpendicular a la recta, los puntos $P(x, y)$ de la recta que pasa por P_0 y es perpendicular al vector $\vec{n}$, quedan determinados por la ecuación

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0.$$

Expresando los vectores en función de sus componentes:

$$(a, b) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0.$$

Y multiplicando escalarmente, obtenemos la *ecuación de la recta que pasa por el punto P_0 y es perpendicular al vector $\vec{n}$* :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Desarrollando esta expresión y haciendo $c = -ax_0 - by_0$, obtenemos la *ecuación general* de la recta¹:

$$ax + by + c = 0.$$

Cuyos coeficientes a, b son las componentes del vector normal.

Nota. Los vectores (a, b) y $(b, -a)$ son perpendiculares porque su producto escalar es cero. Por tanto, la recta $ax + by + c = 0$ es perpendicular al vector (a, b) y paralela al vector $(b, -a)$.

Ejemplo. Determinar la ecuación general de la recta que pasa por el punto $P_0(1, -2)$ y es perpendicular al vector $\vec{n} = (-1, 3)$.

Método 1. Empleamos la primera ecuación y simplificamos el resultado.

- $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$

¹ La denominamos *ecuación general*, porque toda recta del plano se puede escribir de esta forma y porque toda expresión de esta forma corresponde a una recta del plano.

- $-1(x - 1) + 3(y + 2) = 0$.
- Simplificando, queda la ecuación $x - 3y - 7 = 0$.

Método 2. Empleamos la segunda ecuación, introduciendo las componentes del vector normal y forzando que la recta pase por el punto.

- $ax + by + c = 0$.
- $(-1) \cdot x + 3 \cdot y + c = 0$.
- $(-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + c = 0 \Rightarrow c = 7$.
- La ecuación es $x - 3y - 7 = 0$.

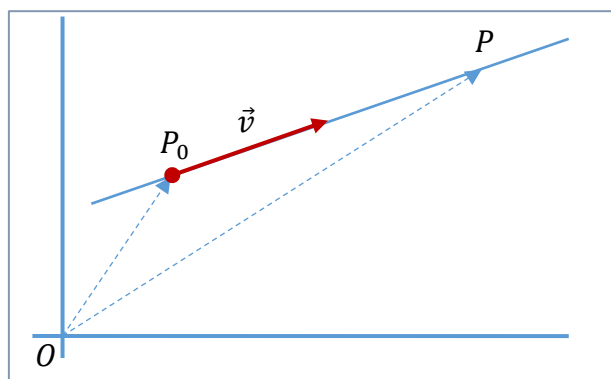
Ecuación vectorial

Dado un punto $P_0(x_0, y_0)$ y un vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$, los puntos $P(x, y)$ de la recta que pasa por P_0 y es paralela al vector $\vec{v}$ quedan determinados por la ecuación

$$\overrightarrow{P_0P} = \lambda \cdot \vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

O bien,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \cdot \vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$



Expresando los vectores en función de sus coordenadas obtenemos la *ecuación vectorial* de la recta

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(v_1, v_2)$$

Expresando la ecuación vectorial componente a componente obtenemos la *ecuación paramétrica*

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 \end{cases}$$

Si las componentes del vector $\vec{v}$ no son nulas, podemos eliminar λ y obtener la *ecuación continua*

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$$

Ejemplo. Ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3,2)$ y es paralela al vector $\vec{v} = (2,5)$.

- E. vectorial $(x, y) = (3, 2) + \lambda(2, 5) \Rightarrow (x, y) = (3 + 2\lambda, 2 + 5\lambda)$
- E. paramétrica $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 + 5\lambda \end{cases}$
- E. continua $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{5}$

Pendiente de la recta

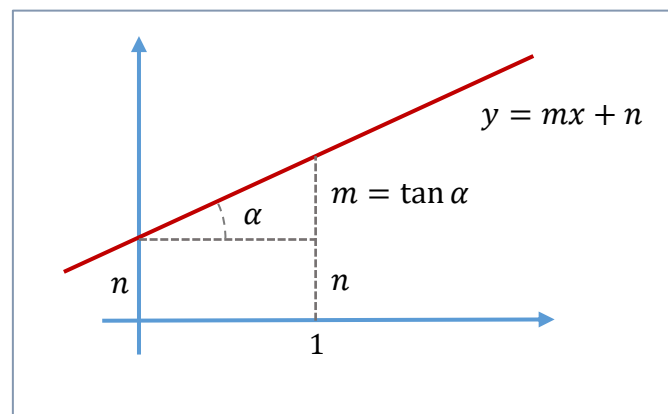
En la ecuación general de la recta $ax + by + c = 0$,

Si $b = 0$, la recta $ax + c = 0$ es la recta vertical dada por $x = x_0$, con $x_0 = -c/a$.

Si $b \neq 0$, haciendo $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, y renombrando los coeficientes, obtenemos la *ecuación explícita*

$$y = mx + n.$$

Siendo $m = -a/b$ la *pendiente* de la recta, es decir, la tangente del ángulo α que forma la recta con el eje X .



Otras ecuaciones

La recta que pasa por el punto P_0 y tiene pendiente m es paralela al vector $(1, m)$ y perpendicular al vector $(m, -1)$. Por tanto, su ecuación viene dada por $m(x - x_0) - (y - y_0) = 0$, o bien

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

La recta que pasa por dos puntos P_0, P_1 tiene pendiente $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Por tanto, su ecuación es

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

Si $x_0 = x_1$, los dos puntos están alineados verticalmente y la ecuación de la recta es $x = x_0$.

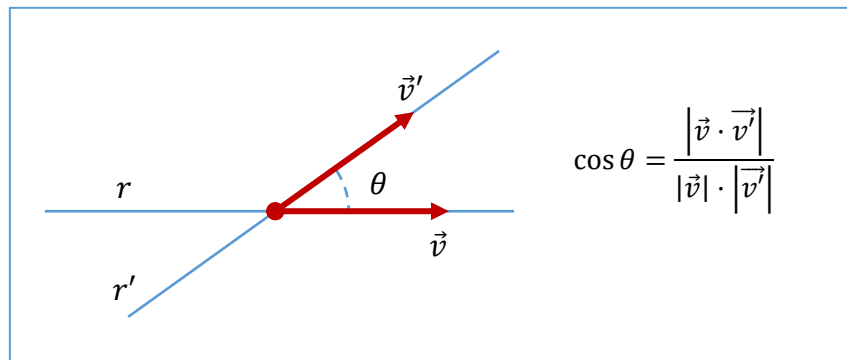
Ejemplo. Ecuación general de la recta que pasa por los puntos $A(-1, 2), B(3, 4)$.

$$y - 2 = \frac{4 - 2}{3 + 1} (x + 1) \Rightarrow x - 2y + 5 = 0.$$

Ejercicio. Expresar la ecuación obtenida en forma paramétrica.

Ángulo entre dos rectas

El ángulo entre dos rectas es el ángulo más pequeño que se forma en su intersección. Si las rectas son paralelas su ángulo es 0. En ambos casos $0 \leq \theta \leq \pi/2$.



Para calcular el ángulo podemos utilizar el ángulo de los vectores directores, teniendo en cuenta que, según la dirección de los vectores que tomemos, el resultado puede ser θ o $(\pi - \theta)$.

Si las rectas tienen pendientes m, m' , podemos calcular el ángulo utilizando

$$\tan \theta = \left| \frac{m - m'}{1 + m \cdot m'} \right|.$$

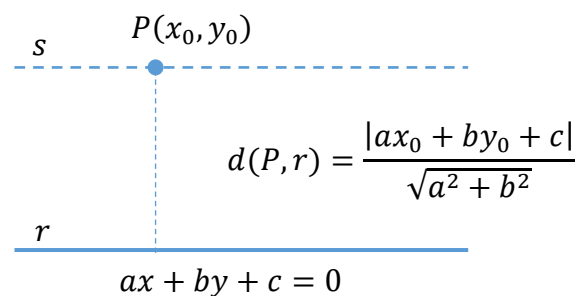
Las rectas son paralelas cuando $m = m'$ y son perpendiculares cuando $mm' = -1$.

Ejercicio. Calcular el ángulo que forma

- la recta $y = 0$ con la recta $y = x$.
- la recta $y = x$ con la recta $y = -x$.
- la recta $x = 0$ con la recta $y = x + 1$

Distancia de un punto a una recta

La *distancia de un punto a una recta* es la distancia del punto al pie de la perpendicular trazada por el punto a la recta. La *distancia entre dos rectas paralelas* es la distancia de un punto cualquiera de una de las rectas a la otra recta.



Ejemplo. Calcular la distancia entre las rectas $\left. \begin{array}{l} r: 2x - y - 3 = 0 \\ s: 2x - y + 1 = 0 \end{array} \right\}$.

- Las dos rectas son paralelas porque tienen la misma pendiente.
- El punto $P(0, 1) \in s$.
- $d(r, s) \equiv d(P, r) = \frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} u.$

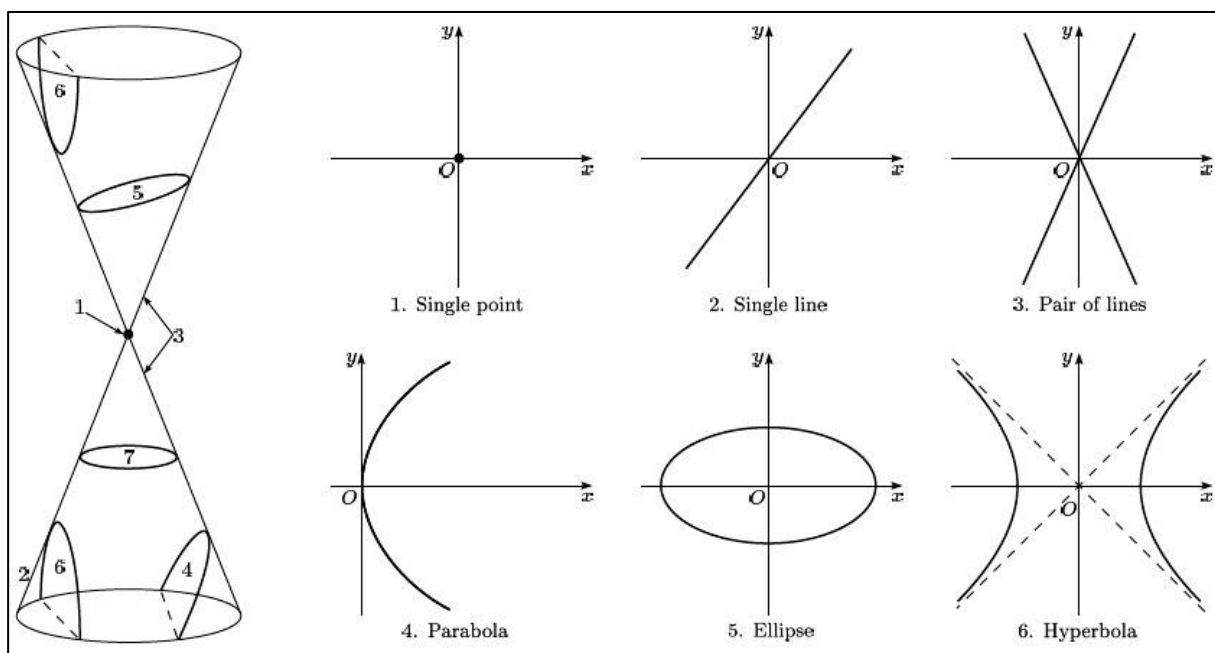
Secciones cónicas

Una ecuación del tipo $F(x, y) = 0$ se representa gráficamente en el plano asignándole a cada par de números (x, y) que verifica la ecuación, el punto del plano con esas mismas coordenadas. La gráfica resultante es una *curva*.

Las curvas más sencillas se obtienen al representar ecuaciones lineales o ecuaciones cuadráticas en dos variables.

- Si representamos una ecuación lineal $ax + by + c = 0$ obtendremos una recta.
- Si representamos una ecuación cuadrática $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ obtendremos una sección cónica.

Las *secciones cónicas*, o *cónicas a secas*, son las curvas que se obtienen al intersectar un doble cono con un plano. Los tres tipos principales son la *elipse*, la *hipérbola* y la *parábola*.

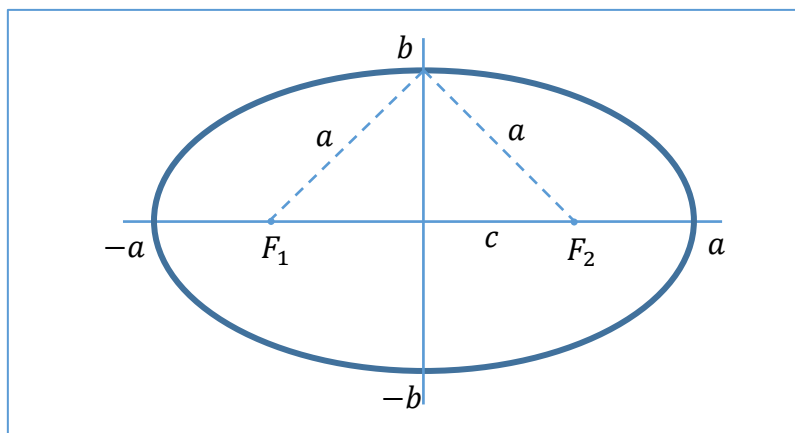


Las secciones cónicas²

² Fuente: <http://www.open.edu/openlearn/science-maths-technology/mathematics-and-statistics/vectors-and-conics/content-section-4.1>.

Elipse

Lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos F_1, F_2 , llamados *focos*, es una constante $2a$ (mayor que la distancia $2c$ entre los focos).



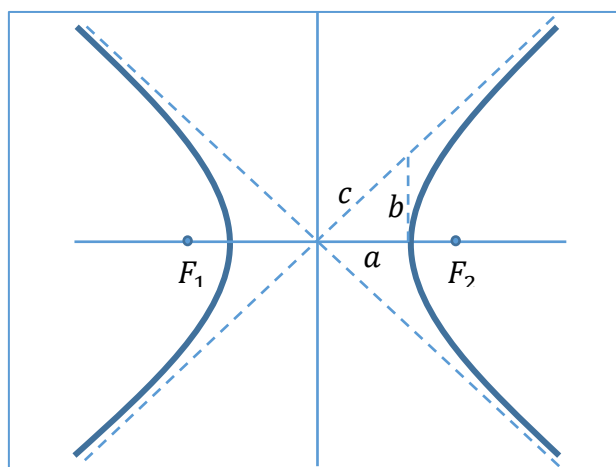
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Semiejes: a, b .
- Excentricidad: $\epsilon = c/a < 1$.
- $c^2 = a^2 - b^2$.
- Cuando los focos coinciden en el origen, $a = b$ y la elipse se reduce a una *circunferencia* de radio a , cuya ecuación es $x^2 + y^2 = a^2$.

Nota. Si situamos los focos en el eje Y, resulta la ecuación $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Hipérbola

Lugar geométrico de los puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos F_1, F_2 , llamados *focos*, es una constante $2a$ (menor que la distancia $2c$ entre los focos).



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

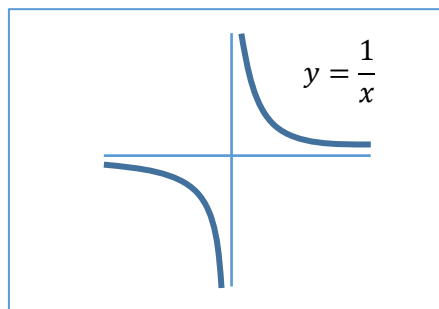
- $c^2 = a^2 + b^2$.
- Excentricidad: $\epsilon = c/a > 1$.
- Asíntotas: $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Nota. Si situamos los focos en el eje Y , resulta la ecuación $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

Hipérbola rectangular

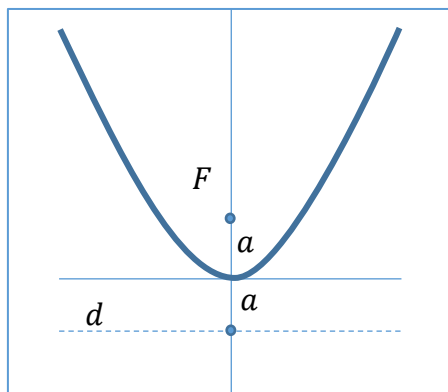
Una hipérbola es *rectangular* cuando sus asíntotas forman un ángulo recto. Cuando $a = b$, la hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$ es rectangular porque sus asíntotas son las rectas perpendiculares $y = \pm x$.

La ecuación de la hipérbola rectangular centrada en el origen y cuyas asíntotas son los ejes coordenados es $xy = a$. En particular, la gráfica de la función $y = 1/x$ es una hipérbola rectangular, cuyas asíntotas son los ejes coordenados.



Parábola

Lugar geométrico de los puntos del plano que están a la misma distancia de una recta fija, llamada *directriz*, y de un punto fijo exterior a la recta, llamado *foco*, situado a una distancia $2a$ de la recta.



$$y = \frac{1}{4a}x^2$$

- Excentricidad: siempre 1.
- El *vértice* es el punto más cercano a la directriz.
- El *eje* es la recta perpendicular a la directriz pasando por el foco.
- El *parámetro* es la distancia del foco a la directriz ($p = 2a$).

Nota. Si situamos el foco en el eje X y la directriz paralela al eje Y , la ecuación es $x = \frac{1}{4a}y^2$.

Clasificación de cónicas

Si la ecuación de una cónica carece de términos en xy , podemos eliminar los términos lineales completando cuadrados, reducir la ecuación a su forma canónica y averiguar de qué tipo es.

Ejemplo. Clasificar la cónica $x^2 + 9y^2 + 2x - 36y + 1 = 0$.

1. Reordenamos la ecuación: $x^2 + 2x + 9(y^2 - 4y) = -1$.

1. Completamos cuadrados: $x^2 + 2x + 1 + 9(y^2 - 4y + 4) = -1 + 1 + 9 \cdot 4$.

2. Agrupamos los cuadrados: $(x + 1)^2 + 9(y - 2)^2 = 36$.

3. Nos queda la elipse $\frac{(x+1)^2}{6^2} + \frac{(y-2)^2}{2^2} = 1$.

Centrada en el origen

Centrada en el punto (x_0, y_0)

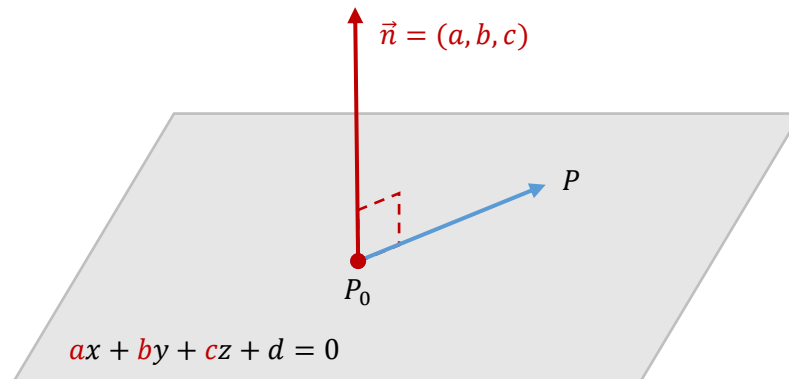
Circunferencia	$x^2 + y^2 = r^2$	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
Elipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$
Parábola	$y = ax^2$	$y = ax^2 + bx + c$
Hipérbola	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

Geometría del espacio

Ecuaciones del plano

Un plano queda determinado especificando un punto P_0 del plano y un vector $\vec{n}$ normal al plano. Los puntos $P(x, y, z)$ del plano que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es perpendicular al vector $\vec{n} = (a, b, c)$ están determinados por la ecuación

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0.$$



Expresando esta ecuación componente a componente, obtenemos la *ecuación del plano que pasa por el punto P_0 y es perpendicular al vector $\vec{n}$* :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Ecuación general

Desarrollando esta expresión y haciendo $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, obtenemos la *ecuación general* del plano³:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Cuyos coeficientes a, b, c , son las componentes del vector normal.

Ejemplo. Determinar la ecuación general del plano que pasa por el punto $P_0(1, -2, -2)$ y es perpendicular al vector $\vec{n} = (2, -1, 3)$.

Método 1. Empleamos la primera ecuación y simplificamos el resultado.

- $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$
- $2(x - 1) - 1(y + 2) + 3(z + 2) = 0$
- Simplificando, queda la ecuación $2x - y + 3z + 2 = 0$.

Método 2. Empleamos la segunda ecuación, introduciendo las componentes del vector normal y forzando que el plano pase por el punto.

- $ax + by + cz + d = 0$
- $2 \cdot x + (-1) \cdot y + 3 \cdot z + d = 0$
- $2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot (-2) + d = 0 \Rightarrow d = 2$.

³ La denominamos *ecuación general*, porque todo plano del espacio se puede escribir de esta forma y porque toda expresión de esta forma corresponde a un plano del espacio.

- La ecuación es $2x - y + 3z + 2 = 0$.

Ejemplo. Determinar tres puntos del plano $2x - y + 3z - 6 = 0$ y un vector perpendicular al mismo.

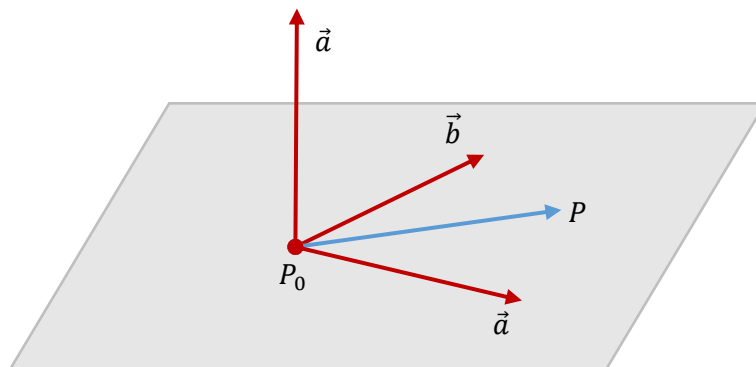
- El plano pasa por los puntos $A(0, 0, 2), B(0, -6, 0), C(3, 0, 0)$.
- El plano tiene vector normal $\vec{n} = (2, -1, 3)$.

Otras ecuaciones

Para calcular la ecuación del plano definido por un punto P_0 y dos vectores $\vec{a}, \vec{b}$, basta calcular la ecuación del plano que pasa por el punto y es perpendicular al producto vectorial de los vectores.

Esta ecuación viene dada por el producto mixto $\overrightarrow{P_0P} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$, que podemos escribir como

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$



Ejemplo. Ecuación del plano determinado por el punto $P_0(2, 0, 0)$, y los vectores $\vec{a} = (-2, 2, 0), \vec{b} = (-2, -2, 2)$.

- La ecuación viene dada por el producto mixto

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 0 & z - 0 \\ -2 & +2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

- Resolviendo el determinante, resulta la ecuación $x + y + 2z - 2 = 0$.

Ejemplo. Ecuación del plano determinado por tres puntos $A(2, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, -2, 2)$.

- Los tres puntos definen dos vectores no paralelos

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2, -2, 2)$$

- La ecuación del plano determinado por el punto A y los dos vectores viene dada por

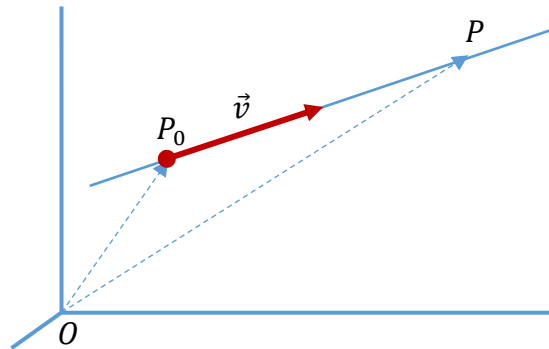
$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 0 & z - 0 \\ -2 & +2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

- Resolviendo el determinante, resulta la ecuación $x + y + 2z - 2 = 0$.

Ecuaciones de la recta

Definimos la recta que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es paralela al vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ como el conjunto de los puntos $P(x, y, z)$ del plano dados por $\overrightarrow{P_0P} = \lambda \cdot \vec{v}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. O bien,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \cdot \vec{v}$$



Ecuación vectorial

Expresando los vectores en función de sus coordenadas obtenemos la *ecuación vectorial* de la recta

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_1, v_2, v_3)$$

Expresando la ecuación vectorial componente a componente obtenemos la *ecuación paramétrica*

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 \\ z = z_0 + \lambda v_3 \end{cases}$$

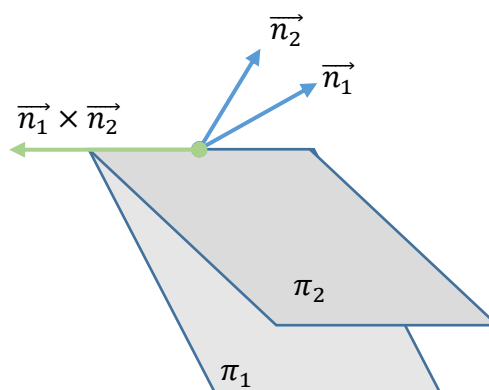
Si las componentes del vector $\vec{v}$ no son nulas, podemos eliminar λ y obtener la *ecuación continua*

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

Intersección de dos planos

La intersección de dos planos no paralelos también determina una recta. El producto vectorial de los vectores normales a los planos es un vector director de la recta.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$



Ejemplo. Ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $A(3, -2, 5)$ y es paralela al vector $\vec{v} = (-1, 4, 5)$.

$$\begin{cases} x = +3 - \lambda \\ y = -2 + 4\lambda \\ z = +5 + 5\lambda \end{cases}$$

Ejemplo. Ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $A(-1, 2, 5)$ y $B(4, 8, 6)$.

- Los dos puntos determinan el vector director $\overrightarrow{AB} = (5, 6, 1)$.
- La ecuación de la recta que pasa por el punto A y es paralela al vector $\overrightarrow{AB}$ es

$$\begin{cases} x = -1 + 5\lambda \\ y = +2 + 6\lambda \\ z = +5 + \lambda \end{cases}$$

Ejemplo. Ecuación paramétrica de la recta determinada por los planos $\begin{cases} x - y + 2z - 2 = 0 \\ 2x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$.

Este problema puede resolverse de varias maneras: veamos dos de ellas.

Método 1. Calculamos un punto y un vector director de la recta.

Para calcular un punto P de la recta, le damos un valor a una de las variables, por ejemplo $z = 0$, y resolvemos el sistema resultante:

$$\begin{cases} x - y + 2 \cdot 0 = 2 \\ 2x + y + 0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow P(1, -1, 0).$$

Para calcular un vector director $\vec{v}$ de la recta utilizamos los vectores normales a los planos:

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k} = 3 \cdot (-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}).$$

Por tanto, podemos coger $\vec{v} = (-1, 1, 1)$.

La ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $P(1, -1, 0)$ y tiene vector director $\vec{v} = (-1, 1, 1)$ es:

$$\begin{cases} x = +1 - \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Método 2. Parametrizamos la recta resolviendo el sistema que forman las dos ecuaciones, utilizando Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases} &\Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + z = +1 \\ y - z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = +1 - z \\ y = -1 + z \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = +1 - \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

Ejemplo. Expresar la recta $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$ como intersección de dos planos.

- Obtenemos los planos igualando las ecuaciones dos a dos.

$$\left. \begin{aligned} \frac{x-3}{2} &= \frac{y+1}{3} \\ \frac{y+1}{3} &= \frac{z-1}{-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} 3x-9 &= 2y+1 \\ -y-1 &= 3z-3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 3x-2y-11 &= 0 \\ y+3z-2 &= 0 \end{aligned}$$

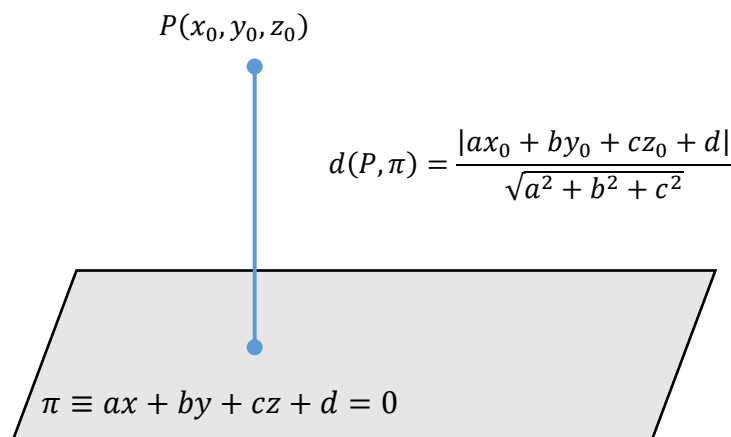
Ángulo entre dos planos

El ángulo entre dos planos π_1, π_2 es el ángulo θ que forman sus vectores normales, $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Si los planos son paralelos su ángulo es 0.

$$\left. \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

Distancia de un punto a un plano

La distancia de un punto a un plano es la distancia del punto al pie de la perpendicular trazada por el punto al plano. La distancia entre dos planos paralelos es la distancia de un punto cualquiera de uno de los planos al otro plano.



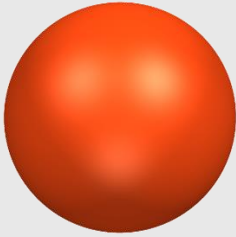
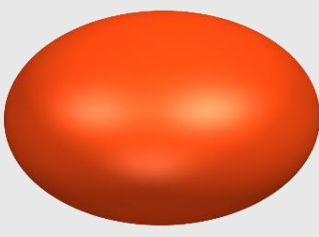
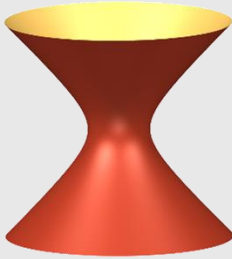
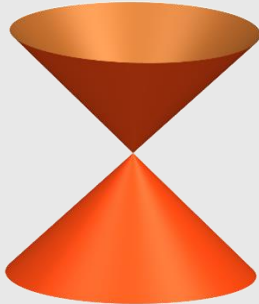
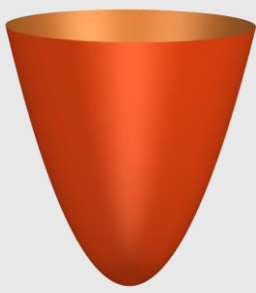
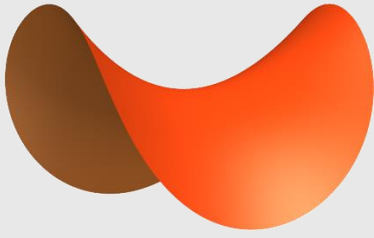
Superficies cuádricas

Una ecuación del tipo $F(x, y, z) = 0$ se representa gráficamente en el espacio asignándole a cada tripleta de números (x, y, z) que verifica la ecuación, el punto del espacio con esas mismas coordenadas. La gráfica resultante es una *superficie*.

Las superficies más sencillas se obtienen al representar ecuaciones lineales o ecuaciones cuadráticas en tres variables.

- Si representamos una ecuación lineal $ax + by + cz + d = 0$ obtendremos un plano.
- Si representamos una ecuación cuadrática, $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$ obtendremos una superficie cuádrica.

Las cuádricas constituyen el análogo tridimensional de las cónicas. Hay 17 tipos básicos, entre los que se encuentran la esfera, el elipsoide, el cilindro, el hiperboloide de una hoja, el cono elíptico, el paraboloide elíptico o el paraboloide hiperbólico.

Esfera	Elipsoide	Hiperboloide de una hoja
		
$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
Cono elíptico	Paraboloide elíptico	Paraboloide hiperbólico
		
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$

Clasificación

Si la ecuación de una cuádrica carece de términos en xy, xz, yz , es decir, si es del tipo

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + gx + hy + iz + j = 0$$

Podemos eliminar los términos lineales y reducir su ecuación a la ecuación canónica de un elipsoide, un cono, un paraboloide o un hiperboloide. El procedimiento se lleva a cabo completando cuadrados.

Ejemplo. Clasificar la cuádrica $x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 2x - 36y + 32z + 65 = 0$.

1. Reordenamos: $x^2 + 2x + 9(y^2 - 4y) + 4(z^2 + 8z) = -65$.

2. Completamos cuadrados:

$$x^2 + 2x + 1 + 9(y^2 - 4y + 4) + 4(z^2 + 8z + 16) = -65 + 1 + 9 \cdot 4 + 4 \cdot 16.$$

3. Agrupamos: $(x + 1)^2 + 9(y - 2)^2 + 4(z + 4)^2 = 36$.

4. Nos queda el elipsoide: $\frac{(x+1)^2}{6^2} + \frac{(y-2)^2}{2^2} + \frac{(z+4)^2}{3^2} = 1$.

	Centro en el origen	Centro en el punto $C(x_0, y_0, z_0)$
Esfera	$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$
Elipsoide	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$