Fundamentos matemáticos

Grado en Ingeniería agrícola y del medio rural

Tema 4
Funciones de una y varias variables

José Barrios García

[Departamento de Análisis Matemático](#)

[Universidad de La Laguna](#)

[jbarrios@ull.es](#)

2017

Índice

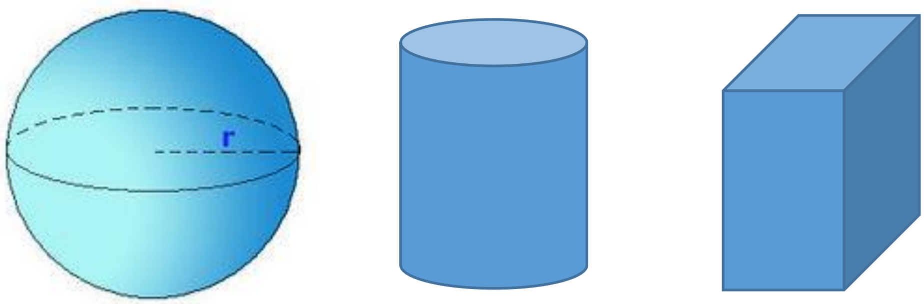
Tema 4. Funciones de una y varias variables

Introducción

Las matemáticas tratan de modelar la realidad. En muchas ocasiones necesitamos modelar situaciones en las que una magnitud depende de una o más variables. El concepto básico es el concepto de *función*.

Una *función* entre dos conjuntos de números reales puede entenderse como una regla que asigna a cada número del primer conjunto un número del segundo conjunto. A menudo la regla se define mediante una *fórmula*.

Función de una variable	Función de dos variables	Función de tres variables
$y = f(x)$	$z = f(x, y)$	$w = f(x, y, z)$



$V = f(r)$	$V = f(r, h)$	$V = f(x, y, z)$

Funciones de una variable

Dados dos conjuntos de números reales A y B, una *función* f de A en B es una regla que a cada elemento $x \in A$ le asigna un único elemento $y = f(x) \in B$.

$$\begin{array}{cccc} f\colon & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longrightarrow & y = f(x) \end{array}$$

La variable x es la *variable independiente.* La variable y es la *variable dependiente* (su valor depende de x). El conjunto A es el *dominio* de la función. El conjunto B es el *rango* de la función. El conjunto $f(A) = \{f(x) \in B \mid x \in A\} \subseteq B$ es la *imagen* o *recorrido* de la función.

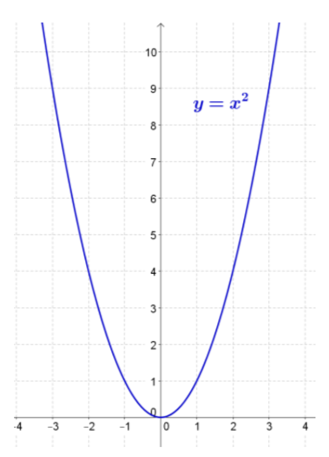
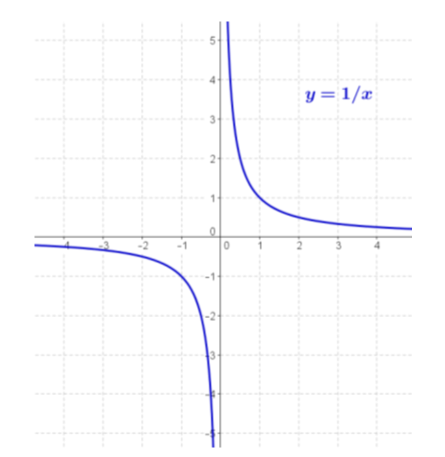
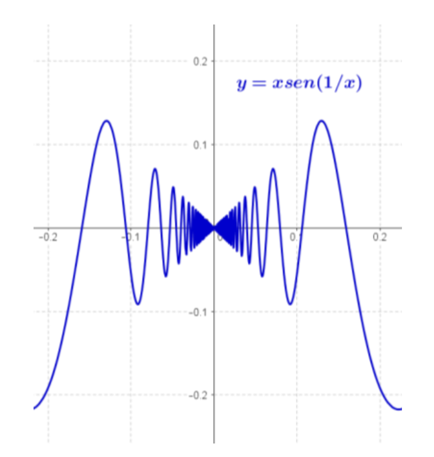
Algunos ejemplos de funciones son

$$\begin{array}{cccc} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} f\colon & \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & 1/x \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} f\colon & [0, \infty) & \longrightarrow & [0, \infty) \\ & x & \longrightarrow & \sqrt{x} \end{array}$$

Las siguientes definiciones no representan funciones, ¿por qué?

$$\begin{array}{cccc} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \sqrt{x} \end{array} \quad \begin{array}{cccc} g\colon & [0, \infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \pm\sqrt{x} \end{array}$$

Las funciones se representan gráficamente en el plano coordenado asignándole a cada par de números $(x, f(x))$ el punto del plano con esas mismas coordenadas.

		
$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & x^2 \end{array}$	$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & 1/x \end{array}$	$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & x\,\mathrm{sen}(1/x) \end{array}$

Otras formas de definir una función

A menudo las funciones se definen simplemente mediante una fórmula. Si no se especifica su dominio, se entiende que su dominio es el *dominio natural* de la función (todos los puntos donde la función está bien definida).

- Sea la función $f(x) = \sqrt{x-1}$. Su dominio natural es el intervalo $[1, \infty)$.
- Sea la función $f(x) = \frac{x-1}{x(x-2)}$. Su dominio natural es el conjunto $\mathbb{R} - \{0, 2\}$.

Otras veces las funciones se definen mediante una tabla de valores o dando una gráfica. Por ejemplo, la función dada mediante la tabla de valores

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	3	0	−1	2	−5	0

Las *funciones definidas a trozos* son funciones que se definen de forma diferente en trozos o intervalos diferentes de la recta. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} & x < -1 \\ 0 & \text{si} & -1 \leq x \leq 1 \\ 1-x & \text{si} & 1 < x \end{cases}$$

La función valor absoluto se define a trozos como sigue

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

Función identidad

La función identidad sobre un conjunto A, es la función

$$\begin{array}{cccc} 1_A: & A & \longrightarrow & A \\ & x & \longrightarrow & x \end{array}$$

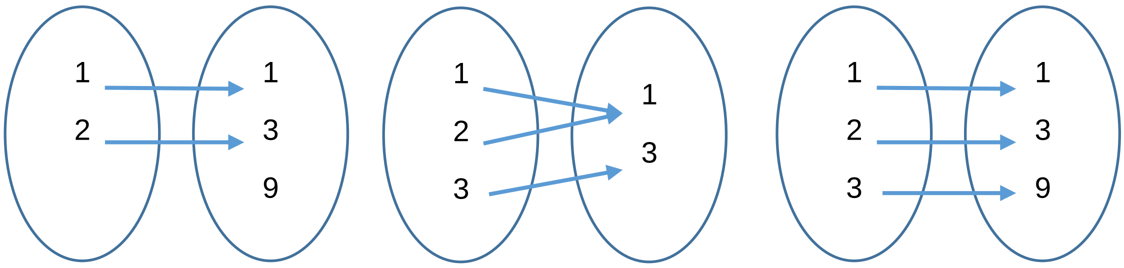
Algunos tipos de funciones

Sean A, B subconjuntos de $\mathbb{R}$, diremos que una función $f: A \longrightarrow B$ es

Correspondencia

1. *Inyectiva,* si envía elementos distintos a imágenes distintas $\big(x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)\big)$.
2. *Sobreyectiva,* si todos los elementos de B tienen original $(f(A) = B)$.
3. *Biyectiva,* si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Ejercicio. Determinar qué tipo de correspondencia muestran las siguientes funciones.



Crecimiento y decrecimiento

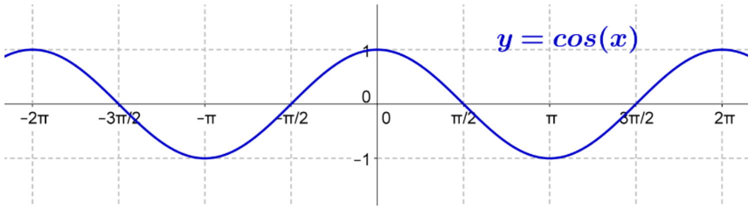
4. *Constante,* si $f(x) = k$ constante, para todo x.
5. *Creciente,* si $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
6. *Estrictamente creciente,* si $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
7. Análogamente se definen las funciones (*estrictamente*) *decrecientes*.
8. (*Estrictamente*) *monótona,* si f es (estrictamente) creciente o decreciente.

Acotación

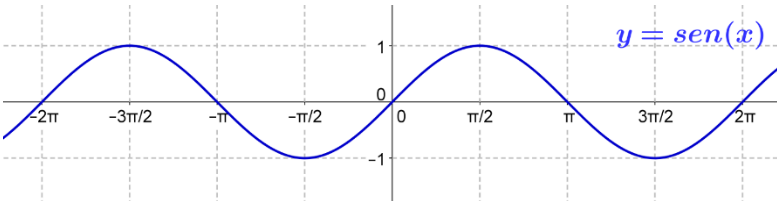
9. *Acotada,* si $f(A)$ está contenida en algún intervalo cerrado.

Simetría

10. *Par,* si $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in A$ (gráfica simétrica respecto al eje Y).



11. *Impar,* si $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in A$ (gráfica simétrica respecto al origen).



Operaciones con funciones

Dadas dos funciones f y g definidas sobre un mismo dominio, definimos las funciones:

- $f+g$ como $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.
- $f-g$ como $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$.
- $f\cdot g$ como $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$.
- f/g como $(f/g)(x)=f(x)/g(x)$, siempre que $g(x)\neq 0$.

Ejemplo. Sean $f(x)=3x-2$ y $g(x)=x^2-1$.

- $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(3x-2)+(x^2-1)=x^2+3x-3$.
- $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(3x-2)-(x^2-1)=-x^2+3x-1$.
- $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(3x-2)\cdot(x^2-1)=3x^3-2x^2-3x+2$.
- $(f/g)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{3x-2}{x^2-1}$.

Composición de funciones

Dadas las funciones $f\colon A\longrightarrow B, g\colon B\longrightarrow C$, su *función compuesta* es la función $g\circ f\colon A\longrightarrow C$ definida por $(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)$.

$$g\circ f\colon \begin{array}{ccccc} \overbrace{A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C}^{g\circ f} \\ x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & g(f(x)) \end{array}$$

En general, la composición de funciones no es una operación conmutativa.

Ejemplo. Sean las funciones $\left.\begin{array}{l} f(x)=1/x \\ g(x)=x+1 \end{array}\right\}$

- $(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=g(1/x)=\frac{1}{x}+1=\frac{x+1}{x}$.
- $(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=f(x+1)=\frac{1}{x+1}$.

Notación. Para la composición de funciones se emplea la siguiente notación

- $f^2=f\circ f$
- $f^3=f\circ f\circ f$
- $f^n=f\circ f\circ \overset{\lfloor n}{\cdots}\circ f$

Función inversa

Si $f\colon A\to B$ es una función biyectiva, su *función inversa* es la función $f^{-1}\colon B\to A$ que devuelve los elementos de B a sus originales en A.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{f^{-1}} & A \\ x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & x \end{array}$$

La inversa de f es la única función que compuesta con f a izquierda y derecha nos proporciona la identidad. Es decir, es la única función que verifica $f^{-1}\circ f=1_A$ y $f\circ f^{-1}=1_B$.

Cálculo de la función inversa

Para calcular la inversa de una función $f(x)$

- Escribimos $y = f(x)$.
- Despejamos x en función de y (si es posible),
- Intercambiamos las variables x e y.

Ejemplo. Calcular la inversa de $f(x) = 3x - 2$ y comprobar que $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = 1_{\mathbb{R}}$.

- $y = 3x - 2 \Rightarrow x = \frac{y+2}{3}$.
- Intercambiando las variables, obtenemos la función inversa $y = \frac{x+2}{3}$, o bien, $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$.

Comprobación

- $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}(3x - 2) = \frac{(3x-2)+2}{3} = x$.
- $(f \circ f^{-1})(x) = f\big(f^{-1}(x)\big) = f\left(\frac{x+2}{3}\right) = 3\left(\frac{x+2}{3}\right) - 2 = x$.

Ejemplo. Hallar la inversa de la función $f(x) = x^2$.

- $y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$.

La inversa no está definida porque $f(x) = x^2$ no es una función biyectiva.

- Si restringimos su dominio al intervalo $[0, \infty)$, su inversa es $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
- Si restringimos su dominio al intervalo (-∞, $0]$, su inversa es $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

Gráfica de la función inversa

Las gráficas de dos funciones inversas son simétricas respecto de la recta $y = x$, porque si un punto (a, b) pertenece a una de las gráficas, el punto (b, a) pertenece a la otra.

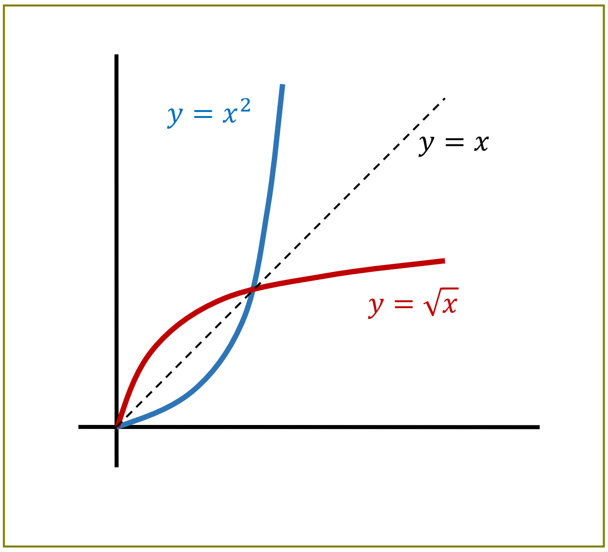


Figura 1. Gráfica de la función inversa.

Funciones algebraicas

En general, las funciones que utilizaremos a lo largo del curso serán las *funciones algebraicas,* las *funciones trascendentes* elementales y sus posibles combinaciones.

Una función algebraica es una función construida a partir de la variable independiente utilizando un número finito de operaciones elementales (suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación). Las funciones algebraicas se dividen en *polinomios*, *funciones racionales* (cociente de polinomios) y *funciones irracionales* (aparecen raíces de la variable).

$y = ax + b$	$y = 1/x$	$y = \dfrac{1}{x^2}$	$y = \sqrt{x}$	$y = \lvert x \rvert$
$y = ax^2 + bx + c$	$y = \dfrac{1}{x-a}$	$y = \dfrac{1}{(x-a)^2}$	$y = \sqrt{x-a}$	$y = \lvert x - a \rvert$

Algunas funciones algebraicas elementales

Funciones trascendentes

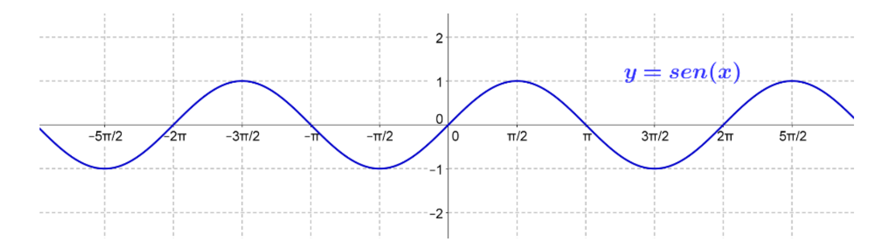
Las funciones que no son algebraicas se denominan *trascendentes*. Las funciones trascendentes elementales son las funciones *trigonométricas*, las funciones *trigonométricas inversas*, las funciones *exponenciales* y las funciones *logarítmicas*.

Funciones trigonométricas

Funciones de ángulos (medidos en radianes) importantes para el estudio de los triángulos y el modelado de fenómenos periódicos. Se definen a partir de las razones de diversos segmentos rectilíneos en el círculo unidad.

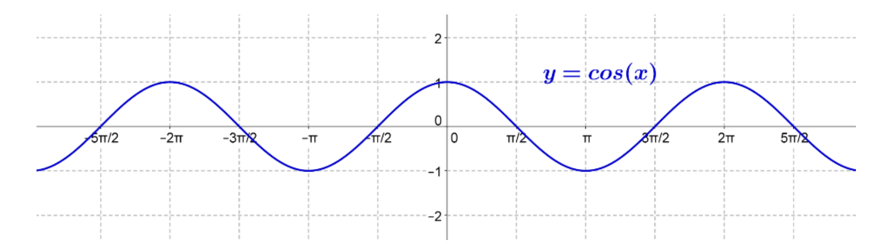
Seno

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longrightarrow & \operatorname{sen} x \end{array}$$



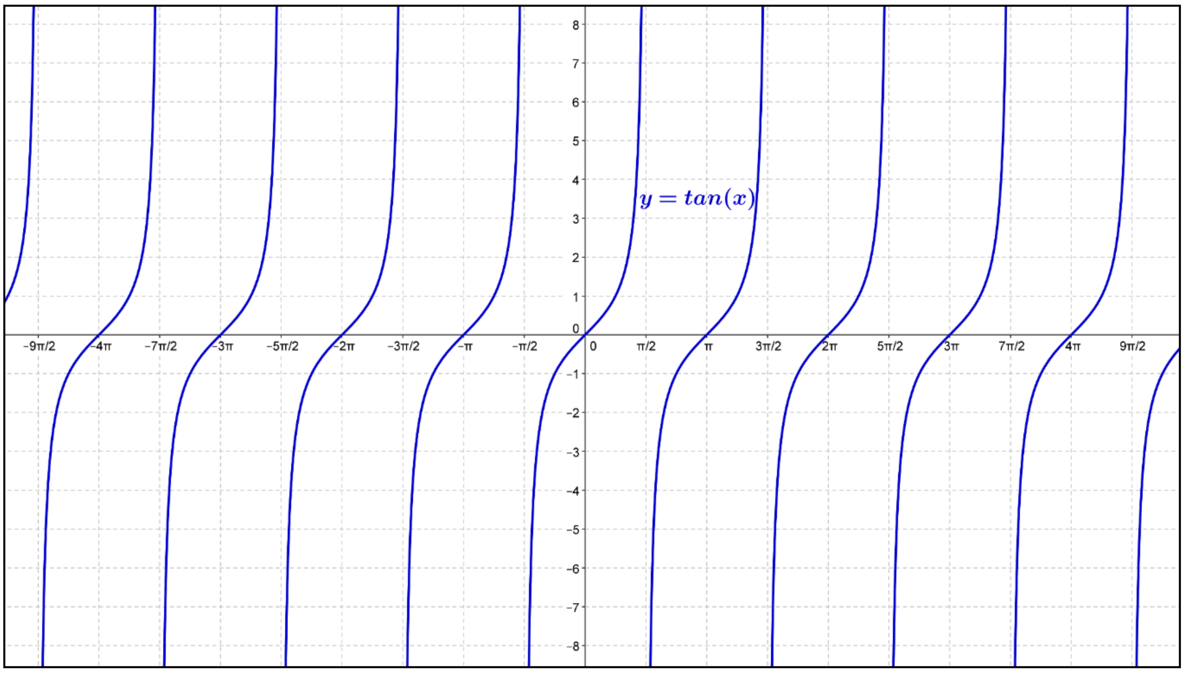
Coseno

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longrightarrow & \cos x \end{array}$$



Tangente

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}_{k\in\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \tan x \end{array}$$



Funciones derivadas de las anteriores

secante	$\sec x = 1/\cos x$.
cosecante	$\csc x = 1/\text{sen}\, x$
cotangente	$\cot x = 1/\tan x$

Funciones trigonométricas inversas

arcoseno	$f: \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [-\pi/2,\pi/2] \\ x & \longrightarrow & \text{asen}\, x \end{array}$
arcocoseno	$f: \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ x & \longrightarrow & \text{acos}\, x \end{array}$
arcotangente	$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & (-\pi/2,\pi/2) \\ x & \longrightarrow & \text{atan}\, x \end{array}$

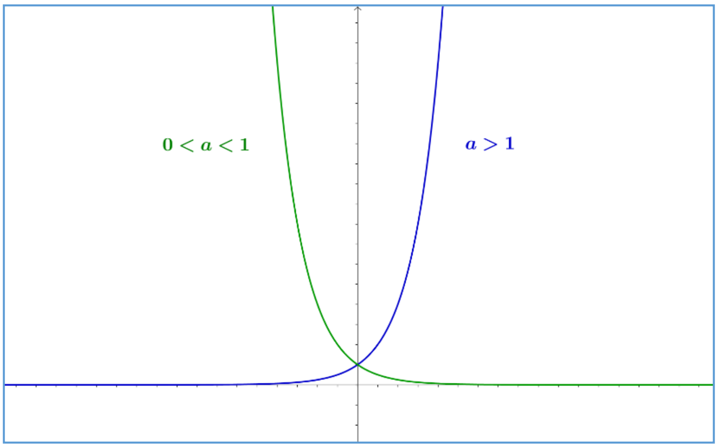
Uso de la calculadora

Cuando usemos las funciones trigonométricas inversas para calcular un ángulo debemos tener en cuenta que siempre hay dos ángulos en la circunferencia con el mismo seno, el mismo coseno o la misma tangente. La calculadora solo nos proporciona uno de los dos ángulos posibles. Si es necesario el otro ángulo, debemos calcularlo en la circunferencia trigonométrica.

Funciones exponenciales

Funciones importantes para modelar fenómenos que crecen/decrecen muy rápidamente. Si a es un número estrictamente positivo y distinto de la unidad, se define la *función exponencial de base* a como $\exp_a(x) = a^x$.

$$\begin{array}{rccc} \exp_a\colon & \mathbb{R} & \rightarrow & (0,\infty) \\ & x & \mapsto & a^x \end{array}$$



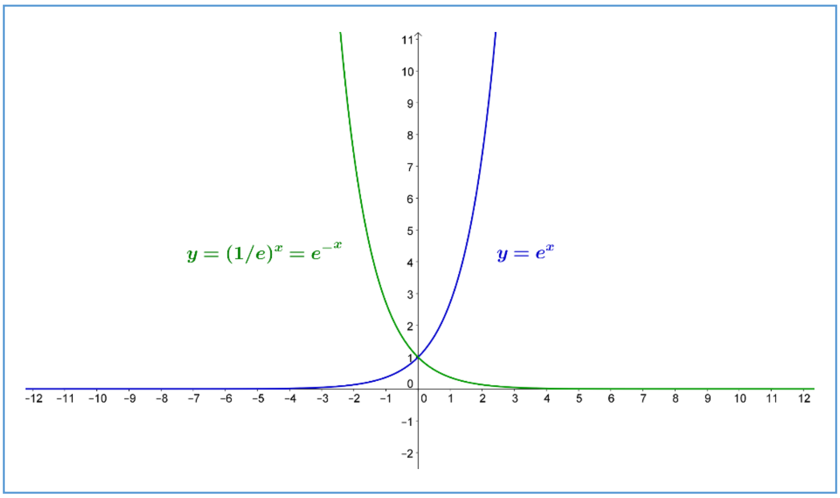
Gráfica de la función exponencial

Su gráfica difiere según la base sea mayor o menor que la unidad. La base más utilizada por sus importantes propiedades es el número e, de forma que cuando no se explicita la base se entiende $\exp(x) = e^x$. Entre sus propiedades (análogas para cualquier otra base) destacan:

- $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$.
- $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.
- $\exp(x - y) = \exp(x)/\exp(y)$.

Nota. Si a es negativo la función exponencial no está bien definida: $(-2)^{1/2} = \sqrt{-2}$.

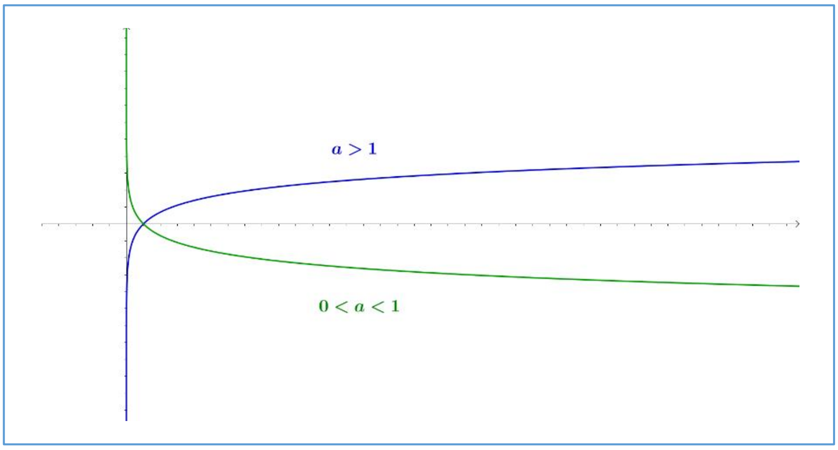
Ejercicio. Calcular las distintas aproximaciones sucesivas de 2^π: $2^3 \longrightarrow 2^{3.1} \longrightarrow 2^{3.14} \longrightarrow 2^\pi$.



Funciones logarítmicas

Funciones importantes para modelar fenómenos que crecen/decrecen muy lentamente. La función logarítmica de base a $(a > 0, a \neq 1)$ es la función inversa de la función exponencial con la misma base. Es decir $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$.

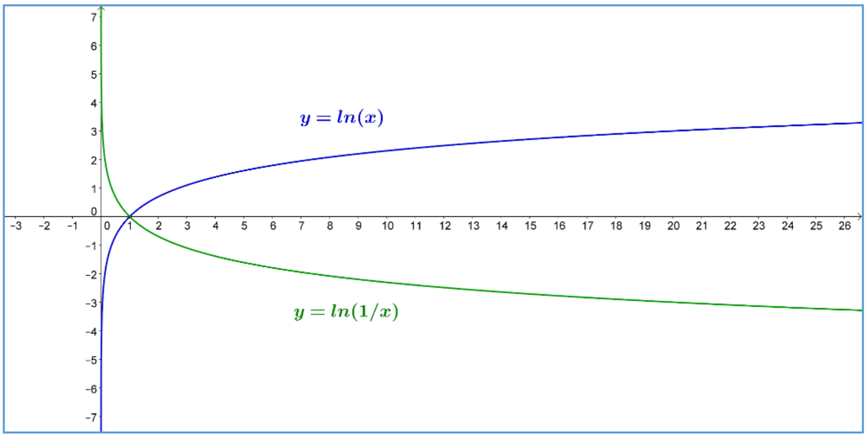
$$\begin{array}{rccc} \log_a\colon & (0,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \log_a x \end{array}$$



Gráfica de la función logarítmica

Su gráfica difiere según la base sea mayor o menor que la unidad. Las funciones logarítmicas más utilizadas son el *logaritmo decimal* $(\log x)$ y, muy especialmente, el *logaritmo neperiano* $(\ln x)$. Entre sus propiedades (análogas para cualquier otra base) destacan:

- $\ln(1) = 0, \ln(e) = 1$.
- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
- $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$.
- $\ln(x^y) = y \ln(x)$.
- $\ln(\sqrt[y]{x}) = \frac{1}{y}\ln(x)$.



Dado que las funciones logarítmicas y exponenciales son funciones inversas, se tiene

- $e^{\ln x} = x$.
- $\ln(e^x) = x$.

Otras funciones trascendentes

- $f(x) = x^{\pi} = e^{\pi \ln x}$.
- $f(x) = x^{x} = e^{x \ln x}$.
- $f(x) = x^{1/x} = e^{\frac{\ln x}{x}}$.

Funciones implícitas

Hasta el momento hemos considerado únicamente funciones definidas mediante una fórmula explícita

$$y = f(x)$$

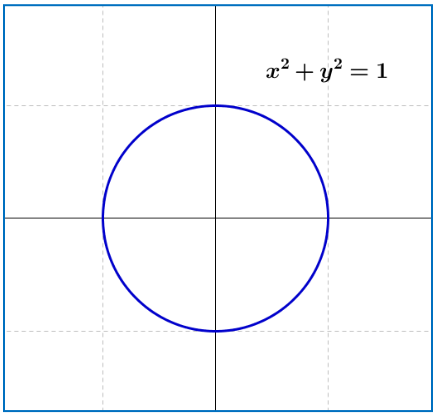
Sin embargo, muchas veces resulta conveniente definir las funciones de forma implícita, es decir, mediante una ecuación del tipo

$$F(x, y) = 0$$

Donde y puede despejarse, al menos localmente, en función de x. En este caso, la gráfica de $f(x)$ coincide, al menos en parte, con la curva definida por la ecuación $F(x, y) = 0$.

Ejemplo. La gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ proporciona los puntos de la circunferencia de radio 1 centrada en el origen. Si despejamos y en función de x, obtenemos dos posibles funciones

- $y = +\sqrt{1 - x^2}$. (representación gráfica: semicircunferencia superior).
- $y = -\sqrt{1 - x^2}$ (representación gráfica: semicircunferencia inferior).



En este sentido, diremos que la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ es una función implícita de y, es decir, define implícitamente a cualquiera de las dos funciónes explícitas obtenidas.

Nota. Toda función explícita puede escribirse de forma implícita. Por ejemplo, $y = x + 1$ puede escribirse como $x - y + 1 = 0$.

Por otra parte, cuando la función implícita es sencilla se puede despejar la variable dependiente y expresarla en forma explícita. Por ejemplo, la función implícita $x(y + 1) - 1 = 0$ puede escribirse de forma explícita como $y = \frac{1-x}{x}$.

Funciones de dos variables

Dada una región D del plano, llamaremos *función de dos variables* a toda regla que a cada punto $(x, y) \in D$ le asigna un único punto $z \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} f:\ D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \to & z = f(x, y) \end{array}$$

El conjunto D es el *dominio* de la función. El conjunto de valores $f(D) \subset \mathbb{R}$ es el *recorrido* o *imagen* de la función. Cuando se da una función sin especificar su dominio se entiende que su dominio son todos los puntos del plano donde la función está bien definida (*dominio natural*).

Ejemplos

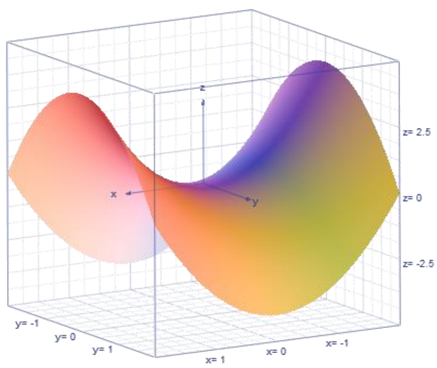
$\begin{array}{rcl} f:\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \to & x + y \end{array}$	$\begin{array}{rcl} f:\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \to & \operatorname{sen}(xy) \end{array}$	$\begin{array}{rcl} f:\ \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \to & \sqrt{xy} \end{array}$

Ejercicio. Comprobar el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

1. $z = \frac{1}{x+y}$. Su dominio es el todo plano, exceptuando la recta $x + y = 0$. Su recorrido es $\mathbb{R} - \{0\}$.
2. $z = \ln(x + y)$. Su dominio es el semiplano $x + y > 0$. Su recorrido es todo $\mathbb{R}$.
3. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Su dominio es el círculo de radio 1. Su recorrido es el intervalo $[0, 1]$.

Representación gráfica

Las funciones de dos variables se representan gráficamente en el espacio asignándole a cada punto (x, y) del dominio, el punto de coordenadas $(x, y, z = f(x, y))$. La gráfica resultante es una *superficie*.

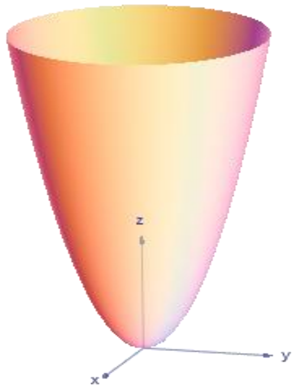


Para esbozar la gráfica de una función tendremos en cuenta:

- Su dominio.
- Las secciones con los planos coordenados (*trazas*).
- Las secciones con planos paralelos al plano XY (*curvas de nivel*).
- Las intersecciones con los ejes coordenados.
- Las posibles simetrías.

Ejemplo. Tal y como hemos visto en el tema 3, las funciones del tipo $z = ax + by + c$ representan planos en el espacio (ya sabemos representarlos).

Ejemplo. $z = x^2 + y^2$.



Dominio: $\mathbb{R}^2$. Recorrido: $[0, \infty)$

Trazas en los planos coordenados

- Plano $XY. z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow$ Punto $P(0,0,0)$.
- Plano $XZ. y = 0 \Rightarrow z = x^2$ Parábola.
- Plano $YZ. x = 0 \Rightarrow z = y^2$ Parábola.

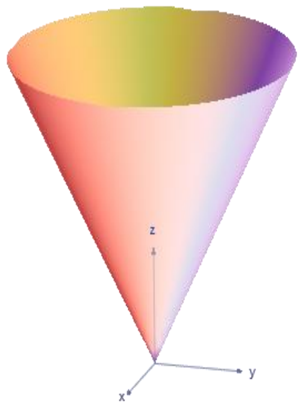
Curvas de nivel: $x^2 + y^2 = c$ constante $\Rightarrow$ Circunferencias de radio $\sqrt{c}$.

Cortes con los ejes

- Eje $X. y = z = 0 \ \Rightarrow x = 0 \Rightarrow P(0,0,0)$.
- Eje $Y. x = z = 0 \ \Rightarrow y = 0 \Rightarrow P(0,0,0)$.
- Eje $Z. x = y = 0 \ \Rightarrow z = 0 \Rightarrow P(0,0,0)$.

Representación gráfica: paraboloide de revolución.

Ejemplo. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Dominio: $\mathbb{R}^2$. Recorrido: $[0, \infty)$

Trazas en los planos coordenados

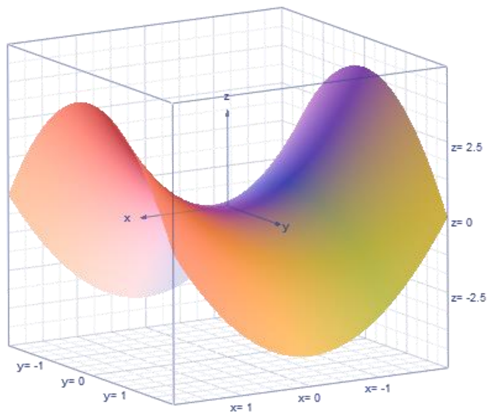
- Plano $XY. z = 0 \Rightarrow \ x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow$ Punto $P(0,0,0)$.
- Plano $XZ. y = 0 \Rightarrow \ z = \sqrt{x^2} = |x|$.
- Plano $YZ. x = 0 \Rightarrow \ z = \sqrt{y^2} = |y|$.

Curvas de nivel $\Rightarrow x^2 + y^2 = c^2$ constante. Circunferencias de radio c.

Cortes con los ejes: $P(0,0,0)$.

Representación gráfica: cono invertido.

Ejemplo. $z = x^2 - y^2$



Dominio: $\mathbb{R}^2$. Recorrido: $\mathbb{R}$.

Trazas en los planos coordenados

- Plano $XY. z = 0 \Rightarrow y = \pm x$.
- Plano $XZ. y = 0 \Rightarrow z = x^2$ Parábola.
- Plano $YZ. x = 0 \Rightarrow z = -y^2$ Parábola.

Curvas de nivel: $x^2 - y^2 = c$ constante. Hipérbolas.

Cortes con los ejes: $P(0,0,0)$.

Representación gráfica: paraboloide hiperbólico o silla de montar.

Operaciones elementales

La *suma*, *resta, producto* y *cociente* de funciones de dos variables se define de forma análoga a las funciones de una variable.

Dadas dos funciones f y g definidas sobre un mismo dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$, definimos

- $f+g$ como $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
- $f-g$ como $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$.
- $f \cdot g$ como $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
- f/g como $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$, siempre que $g(x) \neq 0$.

Composición de funciones

Dos funciones de dos variables no pueden componerse. Sí puede componerse una función de una variable sobre una función de dos variables.

Ejemplo. Sean $f(x,y) = x + y, g(x) = x^2$. La función $h = g \circ f$ viene dada por $h(x,y) = (x+y)^2$.

Funciones implícitas

Hasta el momento hemos considerado funciones definidas mediante una fórmula explícita

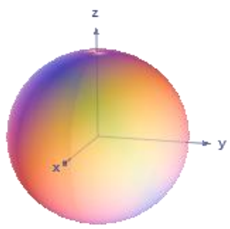
$$z = f(x,y)$$

Sin embargo, igual que ocurre con las funciones de una variable, muchas veces resulta conveniente definir las funciones de forma implícita, es decir, mediante una ecuación del tipo

$$F(x,y,z) = 0$$

Donde z puede despejarse, al menos localmente, en función de (x,y). En este caso, la gráfica de $z = f(x,y)$ coincide, al menos en parte, con la de $F(x,y,z) = 0$.

Ejemplo. La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nos da la superficie de la esfera unidad centrada en el origen.



Si despejamos z en función de (x,y), obtenemos dos posibles funciones

- $z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (representación gráfica: semiesfera superior).
- $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (representación gráfica: semiesfera inferior).

En este sentido, diremos que la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ es una función implícita de z, es decir, define implícitamente a cualquiera de las dos funciónes explícitas obtenidas.

Nota. Igual que sucede con las funciones de una variable, toda función explícita puede escribirse fácilmente de forma implícita. Por su parte, cuando la función implícita es sencilla se puede despejar la variable y expresarla en forma explícita.