Fundamentos matemáticos

Grado en Ingeniería agrícola y del medio rural

Tema 5
Derivación de funciones de una y varias variables

José Barrios García

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de La Laguna

jbarrios@ull.es

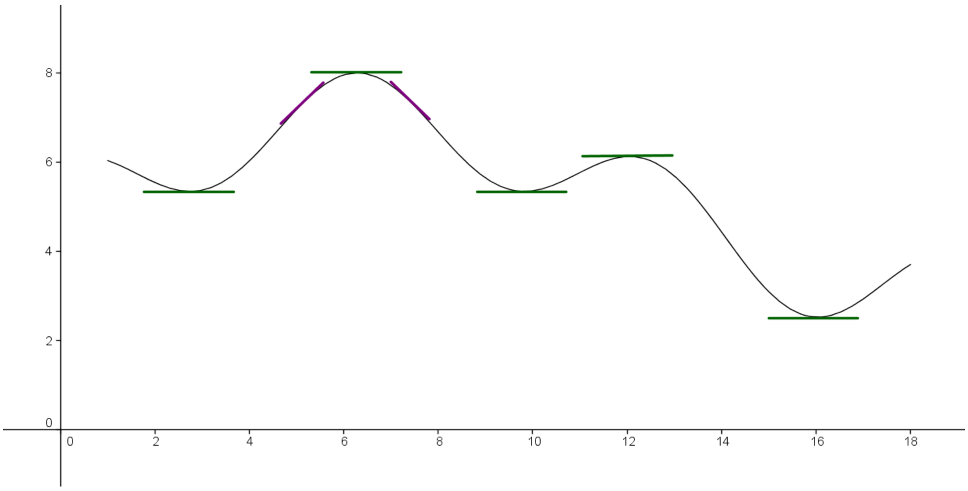
2017

Índice

Tema 5. Derivación de funciones de una y varias variables

Introducción

De forma intuitiva, diremos que una función es *continua en un punto*, si la gráfica de la función no se rompe en dicho punto. De la misma forma, diremos que una función es *continua en un intervalo* si su gráfica no se rompe en ningún punto del intervalo. En este sentido, una forma efectiva de estudiar una función continua consiste en estudiar el comportamiento de la tangente a la curva.



En efecto:

- En los puntos donde la tangente tiene pendiente positiva, la función crece.
- En los puntos donde la tangente tiene pendiente negativa, la función decrece.
- En los puntos donde la tangente tiene pendiente cero (está horizontal), puede haber un extremo (máximo o mínimo)

Por otra parte, tal y como muestra el gráfico,

- la tangente es una buena aproximación de la curva en los alrededores del punto de tangencia, lo que nos permite simplificar mucho determinados cálculos.

Precisamente, buena parte de la potencia del Cálculo se debe a que calcular la tangente a una curva es un proceso bastante sencillo y debidamente automatizado. El proceso consiste básicamente en, dada una función $y = f(x)$, obtener o *derivar* de ella (de manera mecánica) una nueva función $f'(x)$, que nos indica en cada punto cuánto vale la pendiente de la recta tangente a la curva original $y = f(x)$ en ese punto. Tanto los puntos extremos de la función como los intervalos de crecimiento y decrecimiento, se obtienen estudiando el signo de la función derivada y los puntos donde se anula.

Nota

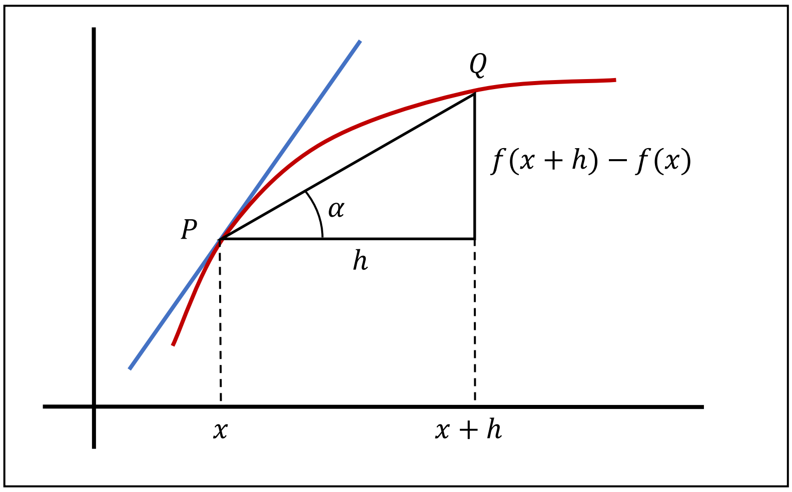
Debido a las limitaciones del tiempo de que disponemos, en lo que sigue de curso nos limitaremos a considerar funciones que se obtengan a partir de las funciones algebraicas y de las funciones trascendentes elementales utilizando las operaciones elementales y la composición de funciones. Una propiedad importante de todas estas funciones es que son funciones continuas en todo su dominio.

Salvo el caso de la función valor absoluto, descartaremos el estudio de funciones definidas a trozos, que, a fin de cuentas, se reduce en cada trozo al estudio de las funciones que proponemos, sin más que añadir al estudio los puntos donde *empatan* estas funciones.

Tangente a una curva

Para calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(x, y)$ necesitamos conocer la pendiente de la recta. Para ello, tomamos un punto cercano Q de abscisa $x + h$ y trazamos la recta secante $\overline{PQ}$. A medida que el punto Q se acerca al punto P la recta secante se convierte en la recta tangente. Como la pendiente de la recta secante $\overline{PQ}$ vale

$$\tan \alpha = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



Cálculo de la tangente a una curva

Se define la *recta tangente* en el punto como la recta que pasa por dicho punto y tiene pendiente

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ejemplo. Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$.

- $m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (4 + h) = 4.$
- La ecuación de la recta tangente es $y - 4 = 4(x - 2) \Longrightarrow y = 4x - 4.$

Ejemplo. Hallar la ecuación de la recta tangente a la recta $y = x$ en el punto de abscisa $x = 1$.

- $m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1 + h - 1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1.$
- La ecuación de la recta tangente es $y - 1 = 1(x - 1) \Longrightarrow y = x.$

Ejemplo. Hallar la ecuación de la recta tangente a la cúbica $f(x) = x^3$ en el punto de abscisa $x = 0$.

- $m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h^3 - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} h^2 = 0.$
- La ecuación de la recta tangente es $y - 0 = 0(x - 0) \Longrightarrow y = 0.$

Ejemplo. Hallar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

- $m = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty.$
- Si observamos la gráfica de la función vemos que la recta tangente es $x = 0$.

Tal y como se desprende de estos ejemplos

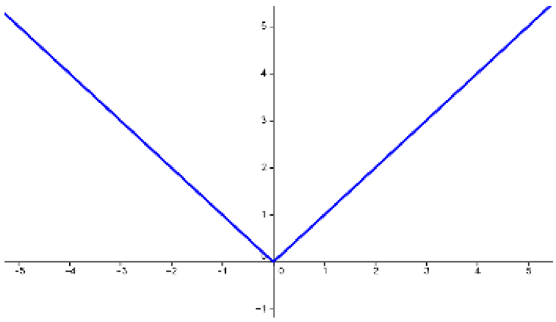
- La tangente a una recta en un punto es la propia recta.
- La tangente a una curva puede cortar a la curva en uno, varios o infinitos puntos.
- La tangente puede atravesar la curva en el punto de tangencia.

Curvas sin tangente

Es fácil ver que, si una función no es continua en un punto, la función no tiene tangente en ese punto. No obstante, hay casos en que la función es continua en un punto y, sin embargo, no tiene tangente. Normalmente, esto sucede cuando la gráfica de la función forma un *pico* en el punto en cuestión (su gráfica no es suficientemente redondeada en los alrededores del punto). El ejemplo estándar lo proporciona la función valor absoluto en el origen de coordenadas.

Ejemplo. La gráfica de la función $y = |x|$ no tiene tangente en el punto $x = 0$.

En efecto, al calcular m, obtenemos $m = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} +1 & \text{cuando} \quad h \to 0^+ \\ -1 & \text{cuando} \quad h \to 0^- \end{cases}$



Función derivada

Para poder construir una función que nos proporcione la pendiente de la recta tangente a la función original en cada punto debemos evitar dos tipos de puntos

- Puntos sin tangente (la pendiente no existe)
- Puntos con tangente vertical (la pendiente es infinita)

Por ello, diremos que una función es *derivable* en un punto si la pendiente de la recta tangente en ese punto existe y es finita. En este caso, la pendiente de la recta tangente en el punto se llamará *derivada* de la función en el punto y la escribiremos $f'(x)$.

Definición. Sea f una función derivable en un intervalo, su *función derivada primera* es la función f' que a cada punto del intervalo le asocia el valor

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si la función f' es derivable en el intervalo, se define la *función derivada segunda* de f como la función f''que a cada punto del intervalo le asocia el valor:

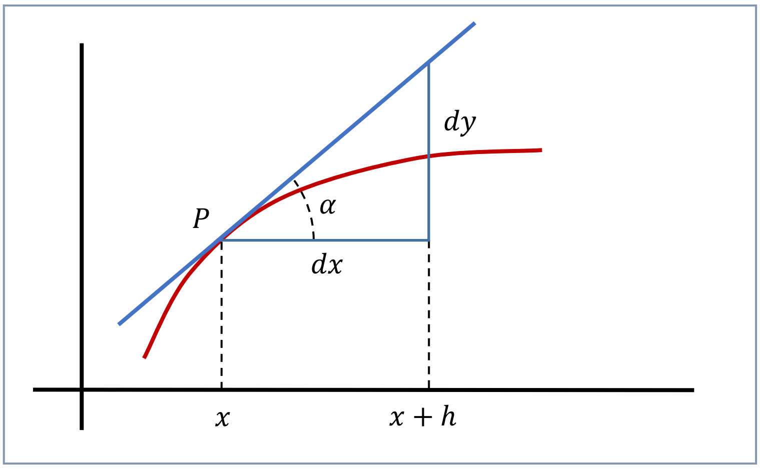
$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Procediendo análogamente se definen las derivadas sucesivas de f de orden $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, denotadas por $f^{n)}$.

Teorema 1. *f derivable en un punto (o en un intervalo) $\Rightarrow$ f continua en el punto (o en el intervalo).*

Diferencial de una función

Como hemos señalado, la tangente a una curva en un punto es una buena aproximación a la función en los alrededores del punto.



Diferencial de una función

De manera que, definiendo dx y dy como se indica en la figura, resulta $\frac{dy}{dx} = \tan\alpha = f'(x)$. O bien,

$$dy = f'(x)\,dx$$

La cantidad variable $dy = f'(x)\,dx$ se denomina *diferencial* de la función en el punto x, y resulta una buena aproximación al verdadero incremento de la función en los alrededores del punto. Es decir

$$dy \cong f(x+h) - f(x)$$

Notación diferencial

Este hecho está en el origen de la notación diferencial de la derivada, según la cual, la derivada de la función $y = f(x)$ podemos escribirla como dy/dx, o bien, como df/dx. Es importante destacar que la notación dy/dx tiene un carácter ambivalente.

- Por una parte, podemos entenderla como un símbolo único e inseparable que representa, simplemente, la derivada $y'(x)$ de la función. Por ejemplo, si $y = x^3$
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2.$$
- Por otra parte, podemos entenderla como un cociente de dos cantidades distintas, *diferencial de* x, y *diferencial de* y, de forma que $\frac{dy}{dx} = y'(x)$. Lo que, en el caso anterior, nos permite escribir

$$dy = 3x^2\,dx$$

En los temas 7 y 8 interpretaremos dy/dx en ambos sentidos, según sea más conveniente.

Nota. El concepto de diferencial es extremadamente sutil y su elaboración completa desborda los límites de este curso. Una explicación detallada puede verse [aquí]

Derivada de las funciones elementales

A continuación, presentamos las funciones derivadas de las funciones elementales. Nótese que el dominio de la función derivada puede no coincidir con el dominio de la función primitiva.

$x^n \to n\,x^{n-1}$	$\sqrt[n]{x} \to \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\operatorname{sen} x \to \cos x$	$\operatorname{asen} x \to \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$e^x \to e^x$	$a^x \to a^x \ln a$	$\cos x \to -\operatorname{sen} x$	$\operatorname{acos} x \to \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x \to \dfrac{1}{x}$	$\log_a x \to \dfrac{1}{x \ln a}$	$\tan x \to \sec^2 x$	$\operatorname{atan} x \to \dfrac{1}{1+x^2}$

Tabla 1. Derivada de las funciones elementales.

Ejemplos

- $f(x) = x^4 \Longrightarrow f'(x) = 4x^3$.
- $f(x) = 3^x \Longrightarrow f'(x) = 3^x \ln 3$.
- $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{3}\, x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}\, x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Cálculo de la derivada

Sean f, g funciones derivables en los intervalos apropiados y k un número real. Entonces las siguientes funciones son derivables en los intervalos apropiados, y sus derivadas son:

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$.
- $(kf)' = kf'$.
- $(f \cdot g)' = f'g + fg'$.
- $(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, siempre que $g(x) \neq 0$.

Ejemplos

- $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 2x - 1 \Longrightarrow f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 10x + 2$.
- $f(x) = \frac{x^2-2}{x+1} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2x\cdot(x+1)-(x^2-2)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$.

Regla de la cadena

- $(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$. Como aplicación, se obtiene la siguiente tabla

$u^n \to n\,u^{n-1}\,u'$	$\sqrt[n]{u} \to \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$\operatorname{sen}(u) \to \cos(u)\;u'$	$\operatorname{asen} u \to \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$e^u \to e^u\,u'$	$a^u \to a^u \ln a\;u'$	$\cos(u) \to -\operatorname{sen}(u)\,u'$	$\operatorname{acos} u \to \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\ln(u) \to \dfrac{u'}{u}$	$\log_a u \to \dfrac{u'}{u \ln a}$	$\tan(u) \to \sec^2(u)\;u'$	$\operatorname{atan} u \to \dfrac{u'}{1+u^2}$

Tabla 2. Derivada de las funciones elementales, siendo $u = u(x)$.

Ejemplos

- $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)$ → Se deriva como una función de la forma: u^n.
- $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ → Se deriva como una función de la forma: $\operatorname{sen}(u)$.

Derivada de la función inversa

Como consecuencia de la regla de la cadena, si f posee inversa y $f'(x) \neq 0$ en un intervalo, entonces f^{-1} es derivable en el intervalo y $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Demostración

$$(f \circ f^{-1})'(x) = (x)' \Rightarrow f'\big(f^{-1}(x)\big) \cdot (f^{-1})'(x) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}.$$

Ejemplo. Calcular la derivada de la función $\operatorname{asen}(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \operatorname{sen} x \\ f^{-1}(x) = \operatorname{asen} x \end{array}\right\} \Longrightarrow \operatorname{asen}'(x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{asen} x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\operatorname{asen} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Interpretación de la derivada

La derivada de una función puede interpretarse de formas diferentes, según el contexto en que estemos trabajando. Entre las más importantes, cabe señalar que la derivada de una función en un punto nos proporciona:

- La pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.
- La velocidad instantánea del móvil en ese punto.
- En general, la tasa de cambio instantáneo de la función en ese punto.

Interpretación geométrica

La derivada de una función en un punto nos proporciona la pendiente de la recta tangente en ese punto. Ello nos permite calcular fácilmente la ecuación de la *recta normal* a la función en el punto (recta perpendicular a la tangente en el punto) y el *ángulo que forman dos curvas al cortarse* (ángulo que forman sus tangentes en dicho punto).

- Ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto (x_0, y_0),

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

- Ecuación de la recta normal a la curva $y = f(x)$ en el punto (x_0, y_0),

$$\left.\begin{array}{ll} y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) & f'(x_0) \neq 0 \\ x = x_0 & f'(x_0) = 0 \end{array}\right\}$$

- Ángulo θ que forman dos curvas f y g en el punto de corte (x_0, y_0).

$$\tan\theta = \left|\frac{m - m'}{1 + m \cdot m'}\right| = \left|\frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)}\right|$$

Naturalmente, si $1 + f'(x_0)g'(x_0) = 0$ las rectas tangentes son perpendiculares en el punto de corte, y las curvas se dicen *ortogonales* en ese punto (se cortan perpendicularmente).

Ejercicio. Calcular las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la parábola $f(x) = x^2 - 1$ en sus puntos de corte con el eje X.

Ejercicio. Calcular los ángulos que forman las curvas $f(x) = x^2 - x + 1$ y $g(x) = 4 - x^2$ en sus puntos de corte.

Derivación de funciones implícitas

Si la función viene dada forma implícita mediante una expresión $F(x, y) = 0$, podemos obtener su derivada en forma implícita. Para ello, derivamos término a término la expresión con respecto a x, teniendo en cuenta que y es una función de x (regla de la cadena).

En general, la derivada implícita calcula la pendiente de la recta tangente en función de las dos coordenadas (x, y) del punto. Por el contrario, la derivada explícita calcula la pendiente en función de la abscisa x del punto.

Ejemplo. La ecuación de la circunferencia unidad es $x^2 + y^2 = 1$. Derivando implícitamente obtenemos

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -x/y$$

De forma que las pendientes, m y m', de las rectas tangente y normal en cada punto de la circunferencia vienen dadas por

$$m = -x/y$$

$$m' = y/x$$

Así, por ejemplo

a) Pendiente de la recta tangente en el punto $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$: $m = -\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = -1$.
b) Pendiente de la recta normal en el mismo punto: $m' = -1/m = 1$.
c) Puntos con tangente horizontal:

$$m = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow \ P(0,1), P(0,-1).$$

d) Puntos con tangente vertical: puntos donde la recta normal está horizontal.

$$m' = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow P(1,0), P(-1,0).$$

Ejemplo. Derivar la ecuación de la hipérbola $xy = 1$, de forma implícita y de forma explícita.

a) De forma implícita, $xy = 1 \Rightarrow y + xy' = 0 \Rightarrow y' = -y/x$.
b) De forma explícita, $y = 1/x \Rightarrow y' = -1/x^2$.

Ejemplo. Derivar implícitamente la función $3x^2y - 6xy^3 + 7 = 0$.

$$6xy + 3x^2y' - 6y^3 - 18xy^2y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{2y^3 - 2xy}{x^2 - 6xy^2}$$

Ejercicio. Calcular las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $x^2 + 3xy + y^2 + 1 = 0$ en el punto $P(-1, 2)$.

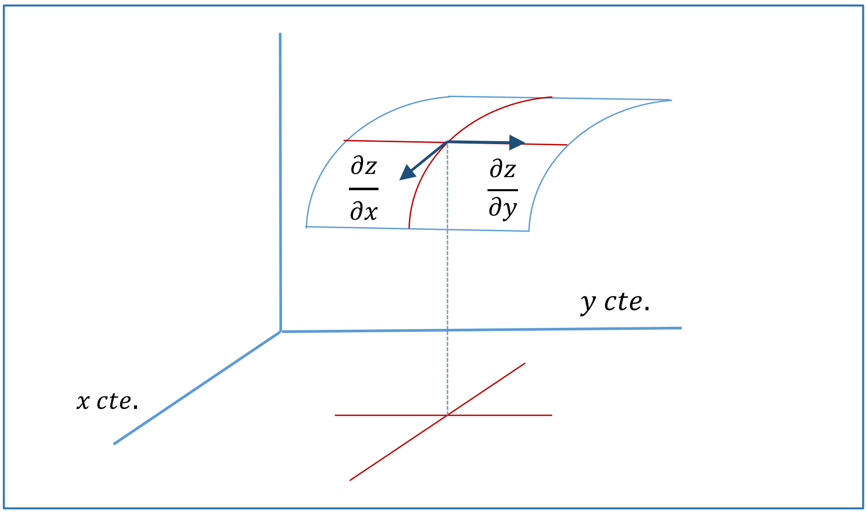
Ejercicio. Demostrar que la elipse $4x^2 + 9y^2 = 45$ y la hipérbola $x^2 - 4y^2 = 5$ son ortogonales.

Derivación de funciones de dos variables

Introducción

De forma similar al caso de una variable, para determinar los puntos donde una superficie alcanza sus valores extremos (máximos y mínimos) debemos estudiar las tangentes a la superficie en cada punto.

En realidad, desde un punto sobre una superficie podemos trazar tangentes en muchas direcciones. Las dos tangentes principales son las tangentes paralelas a los planos coordenados XZ e YZ. Las dos tangentes principales en el punto determinan un plano, denominado *plano tangente* a la superficie en el punto.



La recta perpendicular al plano tangente que pasa por el punto es la *recta normal* a la superficie en el punto. Para definir y calcular todos estos elementos necesitamos el concepto de *derivada parcial*.

Derivadas parciales

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables. Llamaremos

- *Derivada parcial de f respecto de x* a la función $\frac{\partial z}{\partial x}$ que resulta de derivar f con respecto a la variable x, considerando la variable y constante.
- *Derivada parcial de f respecto de y* a la función $\frac{\partial z}{\partial y}$ que resulta de derivar f con respecto a y, considerando x constante.

Notación. Las siguientes notaciones son equivalentes, utilizaremos una u otra según nos resulte más cómodo en cada caso

$$\frac{\partial z}{\partial x} \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \equiv z_x \equiv f_x \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y} \equiv \frac{\partial f}{\partial y} \equiv z_y \equiv f_y$$

Ejemplo. Calcular las derivadas parciales de la función $z = xy^2 + x^3$.

- $z_x = y^2 + 3x^2$.
- $z_y = 2xy + 0 = 2xy$.

Ejemplo. Probar que la función $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$ verifica $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2$.

- $\left.\begin{array}{l} z_x = \frac{2x+y}{x^2+xy+y^2} \\ z_y = \frac{x+2y}{x^2+xy+y^2} \end{array}\right\} \Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x^2+xy}{x^2+xy+y^2} + \frac{xy+2y^2}{x^2+xy+y^2} = \frac{2x^2+2xy+2y^2}{x^2+xy+y^2} = \frac{2(x^2+xy+y^2)}{x^2+xy+y^2} = 2$

Ejemplo. Calcular las derivadas parciales de $z = \sqrt{x^2 + 3y}$ en el punto $P(1, 8)$.

- $z_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3y}} \Rightarrow z_x(1,8) = \frac{2\cdot 1}{2\sqrt{1^2+3\cdot 8}} = \frac{1}{5}$.
- $z_y = \frac{3}{2\sqrt{x^2+3y}} \Rightarrow z_y(1,8) = \frac{3}{2\sqrt{1^2+3\cdot 8}} = \frac{3}{10}$.

Interpretación geométrica

Las derivadas parciales de una función en un punto nos proporcionan las pendientes de las rectas tangentes paralelas a los planos coordenados en dicho punto. Es decir, dada la función $z = f(x, y)$ y un punto de su gráfica $P(x_0, y_0, z_0)$

- $z_x(x_0, \mathrm{y}_0)$ es la pendiente de la recta tangente en P paralela al plano XZ.
- $z_y(x_0, \mathrm{y}_0)$ es la pendiente de la recta tangente en P paralela al plano YZ.

Ejemplo. Calcular la pendiente de la recta tangente a la curva que resulta de intersectar la superficie $z = xy + 3x^2$ con el plano $y = 3$, en el punto $(2, 3, 18)$.

$$z_x = y + 6x \Rightarrow z_x(2, 3) = 15.$$

Esta solución equivale a $\left.\begin{array}{l} z = xy + 3x^2 \\ y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow z(x) = 3x + 3x^2 \Rightarrow z'(x) = 3 + 6x \Rightarrow z'(2) = 15.$

Plano tangente y recta normal

El cálculo del plano tangente y la recta normal a la superficie en un punto resulta mucho más sencillo si expresamos la superficie de forma implícita, es decir, mediante una ecuación $F(x, y, z) = 0$.

Vector normal a una superficie en un punto

Dada una superficie $F(x, y, z) = 0$, llamaremos F_x, F_y, F_z a las derivadas parciales de F respecto de x, y, z respectivamente. El hecho fundamental es que el vector normal $\vec{n}$ a la superficie en un punto P_0 puede expresarse en términos de las derivadas parciales de la función en el punto, siendo

$$\vec{n} = (F_x, F_y, F_z)$$

Por tanto, la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ será

$$F_x(x - x_0) + F_y(y - y_0) + F_z(z - z_0) = 0$$

Y la ecuación paramétrica de la recta normal a la superficie en el punto P_0 será

$$(x, y, z) = (x_0 + \lambda F_x, y_0 + \lambda F_y, z_0 + \lambda F_z)$$

O bien, en forma continua

$$\frac{x - x_0}{F_x} = \frac{y - y_0}{F_y} = \frac{z - z_0}{F_z}$$

Nota

- Se entiende que F_x, F_y, F_z están evaluadas en el punto P_0.
- Cualquier vector proporcional a $\vec{n} = (F_x, F_y, F_z)$ proporciona el mismo plano tangente.
- Si la superficie viene dada de forma explícita $z = f(x, y)$, entonces

$$F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0 \Rightarrow \vec{n} = \left(F_x, F_y, F_z\right) = (f_x, f_y, -1)$$

Ejemplo. Calcular la ecuación del plano tangente y las ecuaciones de la recta normal a la superficie $z = 3x^2 + 2y^2 - 11$ en el punto $P(2, 1, 3)$.

Escribiendo la superficie de forma implícita tenemos

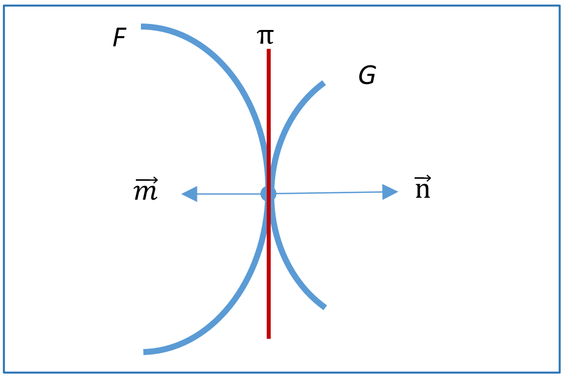
- $F(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 - z - 11 = 0.$
- $\vec{n} = \left(F_x, F_y, F_z\right) = (6x, 4y, -1)$

En el punto $P(2, 1, 3)$ los resultados son

- Vector normal $\vec{n} = (12, 4, -1)$.
- Plano tangente: $12(x-2) + 4(y-1) - (z-3) = 0 \Rightarrow 12x + 4y - z = 25.$
- Recta normal: $\frac{x-2}{12} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{-1}$.

Ejemplo. Demostrar que las siguientes superficies son tangentes en el punto $P(2,1,1)$.

$$\left.\begin{array}{l} F(x,y,z) = x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 4 = 0 \\ G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y + 2z + 10 = 0 \end{array}\right\}$$



Dos superficies son tangentes en un punto si comparten el mismo plano tangente en el punto, lo que equivale a que los vectores normales a las superficies en el punto sean paralelos. Por tanto,

- Comprobamos que el punto pertenece a la intersección de las superficies. En efecto

$$\left.\begin{array}{l} F(2,1,1) = 0 \\ G(2,1,1) = 0 \end{array}\right\}$$

- Calculamos los vectores normales a cada superficie en el punto de intersección.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n} = (2x, 8y, -8z) \\ \vec{m} = (2x-6, 2y-6, 2z+2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{n} \ = \ (+4, +8, -8) \\ \vec{m} = (-2, -4, +4) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n} = -2 \cdot \vec{m}$$

- Los vectores son proporcionales, por tanto, definen el mismo plano tangente en el punto.

Ejemplo. Determinar los puntos de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ cuya recta normal es paralela al vector $\vec{v} = (1,1,1)$.

El vector normal a la esfera en un punto es $\vec{n} = (F_X, F_Y, F_Z) = (2x, 2y, 2z) = 2(x, y, z)$. Por tanto, podemos tomar en cada punto el vector normal simplificado $\vec{n} = (x, y, z)$.

Los puntos que buscamos deben verificar las dos condiciones siguientes

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \vec{n} = \lambda\vec{v} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ (x, y, z) = \lambda(1,1,1) \end{aligned}\right\}$$

Expresando la segunda ecuación componente a componente, obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, que debemos resolver.

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda^2 + \lambda^2 + \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

- $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow P\left(+\frac{\sqrt{3}}{3}, +\frac{\sqrt{3}}{3}, +\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$
- $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = y = z = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow Q\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$

Las soluciones son los puntos P, Q obtenidos.

Ejemplo. Determinar los puntos de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con plano tangente paralelo al plano coordenado XZ.

El vector normal de los puntos de la esfera pedidos debe ser perpendicular al plano XZ, es decir, paralelo, por ejemplo, al $\vec{v} = (0,1,0)$. El problema equivale, por tanto, a calcular los puntos de la esfera con vector normal paralelo al vector $\vec{v} = (0,1,0)$. Un problema equivalente al anterior que, al hacerlo, da como resultado los puntos $P(0, \pm 1, 0)$.

Derivadas parciales de orden superior

Dada una función $z = f(x, y)$, dado que $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ son funciones de (x, y), podemos diferenciar cada una de ellas, tanto respecto de x, como respecto de y.

Estas derivadas se denominan *derivadas parciales segundas*, y se denotan de la siguiente manera

$\frac{\partial z}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx}$ $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z_{xy}$

$\frac{\partial z}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{yx}$ $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy}$

Las derivadas sucesivas de la función se definen de forma análoga.

Ejemplo. Calcularlas las derivadas segundas de $z = \operatorname{sen}(2x + 3y) + \ln x$.

$$\left.\begin{aligned} z_x &= 2\cos(2x + 3y) + 1/x \\ z_y &= 3\cos(2x + 3y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} z_{xx} &= -4\operatorname{sen}(2x + 3y) - \frac{1}{x^2} \\ z_{yy} &= -9\operatorname{sen}(2x + 3y) \end{aligned} \quad \left.\begin{aligned} z_{xy} &= -6\operatorname{sen}(2x + 3y) \\ z_{yx} &= -6\operatorname{sen}(2x + 3y) \end{aligned}\right\}$$

Teorema 2. *$z = f(x, y)$ función continua con derivadas segundas continuas $\Longrightarrow z_{xy} = z_{yx}$.*

Derivación de funciones implícitas

Sea $F(x, y, z) = 0$ una función implícita de z. Si $F_z \neq 0$, entonces

$$z_x = -F_x/F_z \;\; z_y = -F_y/F_z$$

Ejemplo. Dada la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Calcular z_x, z_y en el punto $P(0, 0, 1)$.

Escribiendo la función de forma implícita obtenemos $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z} \Rightarrow z_x(0,0,1) = -\frac{0}{1} = 0$$
$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z} \Rightarrow z_y(0,0,1) = -\frac{0}{1} = 0$$

Funciones de una variable

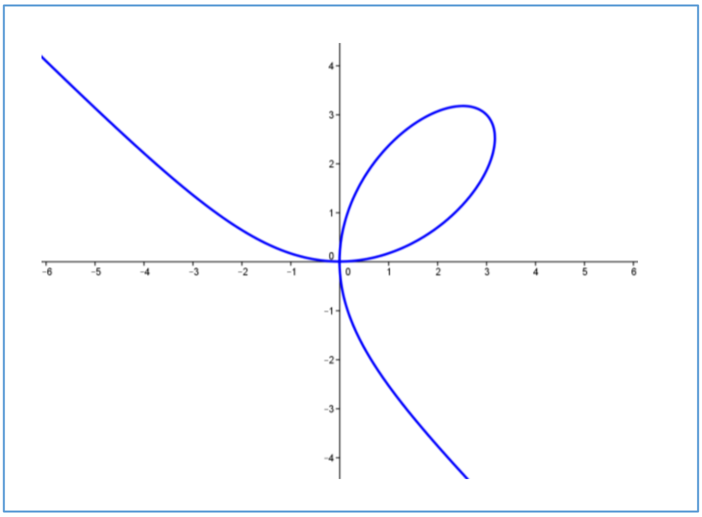
Este método proporciona una nueva forma de derivar funciones implícitas de una variable. En efecto, si $F(x, y) = 0$ es una función implícita de una variable, se tiene

$$y_x = y' = -\frac{F_x}{F_y}$$

Ejemplo. Derivar implícitamente el llamado *folium de Descartes* $x^3 + y^3 = 6xy$.

Reescribiendo la función de forma implícita obtenemos $F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$. De donde

$$\left.\begin{aligned} F_x &= 3x^2 - 6y \\ F_y &= 3y^2 - 6x \end{aligned}\right\} \Rightarrow y' = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{6y - 3x^2}{3y^2 - 6x} = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$



Folium de Descartes