Fundamentos matemáticos

Grado en Ingeniería agrícola y del medio rural

Tema 8
Ecuaciones diferenciales

José Barrios García

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de La Laguna

jbarrios@ull.es

2017

Índice

Tema 8. Ecuaciones diferenciales

Introducción

Una *ecuación diferencial ordinaria* (EDO) es una ecuación que expresa una relación entre una función de una variable y sus derivadas[1]. La relación puede ser sencilla

$$y' = 3y$$

Menos sencilla

$$y'' + 2y' + 3x = 0$$

O muy complicada

$$xy^{(5)} + 3e^{yx} = \sqrt{y\,y'y''}$$

Una *ecuación en derivadas parciales* (EDP) es una ecuación que expresa una relación entre una función de varias variables y sus derivadas parciales.

$$y\,z_x - x\,z_y = 0$$

En este tema solo estudiaremos ecuaciones diferenciales ordinarias. A partir de ahora, cuando hablemos de ecuaciones diferenciales, nos referiremos a este tipo de ecuaciones diferenciales.

Orden de una ecuación diferencial

El *orden* de la ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación, así

- La primera ecuación es una ecuación diferencial de primer orden.
- La segunda ecuación es una ecuación diferencial de segundo orden.
- La tercera ecuación es una ecuación diferencial de quinto orden.

Resolver una ecuación diferencial

Resolver una ecuación diferencial consiste en encontrar una función que verifique la ecuación. Muchas ecuaciones son difíciles de resolver o no tienen solución, pero resulta fácil comprobar si una función dada es solución o no de la ecuación.

Ejemplo. Comprobar que la función $y = e^{3x}$ es una solución de la ecuación $y' = 3y$.

Sustituimos $y = e^{3x}$ en la ecuación y comprobamos que se verifica la igualdad.

- En el lado izquierdo tenemos $y' = 3e^{3x}$.
- En el lado derecho tenemos $3y = 3e^{3x}$.
- Como ambos lados son iguales, $y = e^{3x}$ es una solución.

Ejemplo. Comprobar que la función $y = x^3$ no es una solución de la ecuación $y' = y/x$.

De nuevo, sustituimos la expresión de y en la ecuación.

[1] Introducción basada en http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-03sc-differential-equations-fall-2011/unit-i-first-order-differential-equations/conventions-and-preliminary-material.

- Lado izquierdo: $y' = 3x^2$.
- Lado derecho: $y/x = x^2$.
- Como ambos lados no son iguales, $y = e^{3x}$ no es una solución.

Parametrización del conjunto de soluciones de una ecuación diferencial

Normalmente, las ecuaciones diferenciales que tienen solución tienen más de una. A menudo podemos describirlas todas al mismo tiempo utilizando un parámetro.

Ejemplo. Encontrar todas las soluciones de la ecuación $y' = \cos x$. Integrando obtenemos

$$y = \int \cos x \; dx = \operatorname{sen}(x) + c.$$

Donde c es una constante arbitraria (parámetro), y cada valor del parámetro c proporciona una solución diferente. Por ejemplo, $y = \operatorname{sen}(x) + 1, y = \operatorname{sen}(x) + \pi$ son dos soluciones diferentes de la ecuación diferencial.

Ejemplo. Encontrar todas las soluciones de $y'' = 2x$. Integrando dos veces obtenemos

$$\left.\begin{aligned} y' &= \int 2x\,dx = x^2 + c_1 \\ y &= \int (x^2 + c_1)\,dx = \frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = \frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2$$

Donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias (parámetros), y cada valor particular de los parámetros proporciona una solución diferente. Por ejemplo, $y = \frac{x^3}{3} + 2x + 1$ e $y = \frac{x^3}{3} + \pi x - 2$ son dos soluciones diferentes de la ecuación diferencial.

Problemas de valores iniciales

Son problemas en los que debemos encontrar una solución particular de la ecuación diferencial, de forma que dicha solución verifique ciertas condiciones iniciales.

Problema. Resolver la ecuación $y'' = 2x$ sujeta a las condiciones iniciales $\left.\begin{aligned} y(1) &= 1 \\ y'(1) &= 2 \end{aligned}\right\}$.

Solución. En el ejemplo anterior encontramos la *solución general* de esta ecuación diferencial. Ahora debemos encontrar la *solución particular* que verifica las condiciones iniciales.

Forzando que la solución cumpla las condiciones iniciales

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2 \\ y' &= x^2 + c_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y(1) &= \frac{1}{3} + c_1 + c_2 = 1 \\ y'(1) &= 1 + c_1 = 2. \end{aligned}$$

Obtenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} 1/3 + c_1 + c_2 &= 1 \\ 1 + c_1 &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= -1/3 \end{aligned}$$

Y la solución del problema de valor inicial es

$$y = \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{3}.$$

Ecuaciones de primer orden

A continuación, nos proponemos estudiar ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma

$$y' = f(x, y)$$

Estas ecuaciones también pueden escribirse como

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$$

Ejemplo. La ecuación diferencial $y' = x/y$.

Esta ecuación puede reescribirse como $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$, o bien $x\, dx - y\, dy = 0$.

Ejemplo. La ecuación $(x - y)dx - (x + y)\, dy = 0$.

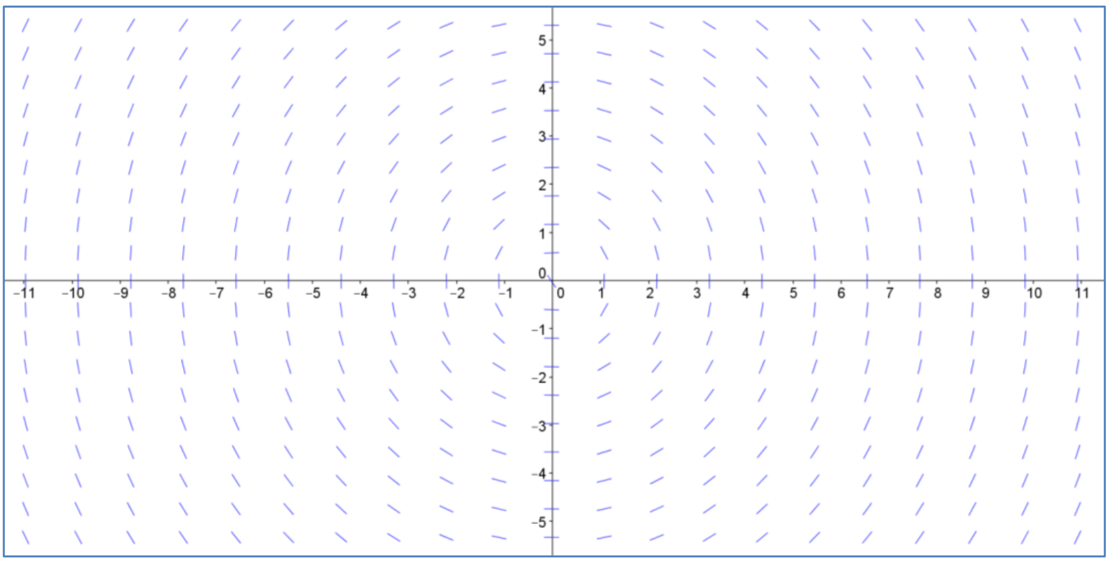
Esta ecuación puede reescribirse como $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$, o bien $y' = \frac{x-y}{x+y}$.

Solución general

La solución general de este tipo de ecuaciones viene dada por una familia de curvas $F(x, y, c) = 0$, siendo c una constante arbitraria. Estas curvas se denominan *curvas integrales* de la ecuación.

Interpretación geométrica

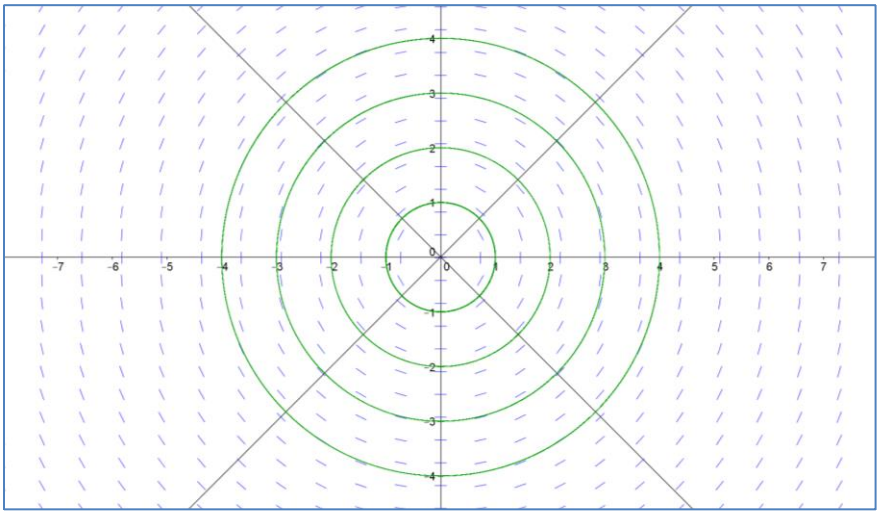
La ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ proporciona en cada punto del plano (x, y) la pendiente de la recta tangente a la curva integral que pasa por ese punto. Estas tangentes definen el *campo de direcciones* de la ecuación.



Campo de direcciones de la ecuación diferencial $y' = -x/y$

Para representar el campo de direcciones utilizamos las curvas *isoclinas*, es decir, las curvas definidas por los puntos que tienen una misma pendiente.

Desde el punto de vista geométrico, resolver una ecuación diferencial consiste en hallar las curvas cuyas tangentes coinciden con la dirección del campo en cada punto.



Algunas isoclinas y curvas integrales de la ecuación diferencial $y' = -x/y$.

Métodos de resolución

Los métodos de resolución dependen del tipo de ecuación. Los tipos que veremos en este curso son ecuaciones de *variables separables*, ecuaciones *homogéneas* y ecuaciones *lineales*.

Ecuaciones de variables separables

Son ecuaciones diferenciales de primer grado que pueden escribirse como $y' = f(x)g(y)$. La solución general se obtiene separando las variables e integrando.

Ejemplo. Resolver la ecuación diferencial $y' = -\frac{x}{y}$.

Reescribimos la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Separamos las variables

$$y\,dy = -x\,dx$$

Integramos

$$\int y\,dy = -\int x\,dx$$

Y obtenemos la solución

$$\frac{y^2}{2} + c_1 = -\frac{x^2}{2} + c_2$$

O bien

$$x^2 + y^2 = 2c_2 - 2c_1$$

Dado que $2c_2 - 2c_1$ sigue siendo una constante c, obtenemos como solución general la familia de circunferencias centradas en el origen

$$x^2 + y^2 = c$$

Ejemplo. Resolver la ecuación diferencial $(x-1)dx+(y-1)\,dy=0$.

$$\int (y-1)dy=\int (1-x)dx \Rightarrow \frac{y^2}{2}-y+c_1=x-\frac{x^2}{2}+c_2 \Rightarrow x^2-2x+y^2-2y=c.$$

Esta solución general puede reescribirse como

$$(x-1)^2+(y-1)^2=c$$

Ejemplo. Resolver la ecuación diferencial $y'=xy$.

$$\frac{dy}{dx}=xy \Rightarrow \int \frac{dy}{y}=\int xdx \Rightarrow \ln|y|+\mathrm{c}_1=\frac{x^2}{2}+c_2 \Rightarrow \ln|y|=\frac{x^2}{2}+c.$$

Eliminado el logaritmo, y renombrando siempre el término constante como c, obtenemos

$$|y|=e^{\frac{x^2}{2}+c} \Rightarrow |y|=e^c e^{x^2/2} \Rightarrow |y|=ce^{x^2/2}, c>0 \Rightarrow y=ce^{x^2/2}, c\neq 0$$

Como el valor $c=0$ también proporciona una solución de la forma $y=0$, la solución general será

$$y=ce^{x^2/2}$$

Caso particular

En el caso particular de que la ecuación sea de la forma $y'=f(x)$, la solución se reduce a resolver la integral indefinida $y=\int f(x)dx$.

Ejemplo. Resolver la ecuación diferencial $y'=\cos x$.

$$y'=\cos x \Rightarrow y=\int \cos(x)\,dx=\operatorname{sen}(x)+c$$

Ecuaciones homogéneas

Son ecuaciones diferenciales de primer grado que pueden escribirse como

$$y'=f(y/x)$$

El cambio $y/x=t$ las convierte en ecuaciones de variables separables. Nótese que

$$y=x\cdot t \Rightarrow y'=t+x\cdot \mathrm{t}'$$

Ejemplo. Resolver la ecuación diferencial $y'=\frac{x-y}{x+y}$.

Es una ecuación homogénea porque dividiendo numerador y denominador por x obtenemos

$$y'=\frac{1-y/x}{1+y/x}$$

Haciendo el cambio $y/x=t$ obtenemos la ecuación de variables separables

$$t+x\cdot \mathrm{t}'=\frac{1-t}{1+t}.$$

Resolviendo esta ecuación y deshaciendo el cambio obtenemos la solución general

$$x^2-2xy-y^2=c$$

Ecuaciones lineales

Son ecuaciones de primer grado que pueden escribirse como $y' + f(x)\,y = g(x)$. Para resolverlas multiplicamos la ecuación por una cierta función $u = u(x)$, llamada *factor integrante*, que verifique

$$uy' + ufy = (uy)'$$

Ello convierte la ecuación en una integral indefinida, que debemos resolver. Para que todo esto suceda el factor integrante debe verificar $u' = uf$, para lo que basta tomar $u = e^{\int f(x)\,dx}$

Resolución

Por tanto, el método para resolver este tipo de ecuaciones consiste en

1. Poner la ecuación en forma estándar: $y' + f(x)\,y = g(x)$.
2. Calcular el factor integrante: $u = e^{\int f(x)dx}$.
3. Multiplicar ambos lados de la ecuación por el factor integrante.
4. Integrar.

Ejemplo. Resolver la ecuación $xy' - y = 2x^3$.

Ponemos la ecuación en forma estándar, dividiéndola por x

$$y' - \frac{y}{x} = 2x^2$$

Calculamos el factor integrante

$$u = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln|x|} = e^{\ln|1/x|} = |1/x|$$

Multiplicamos la ecuación por el factor integrante (podemos quitar el valor absoluto porque en ambos casos queda la misma ecuación)

$$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 2x$$

Agrupando obtenemos

$$\left(\frac{1}{x}\cdot y\right)' = 2x$$

Integrando esta ecuación resulta

$$\frac{y}{x} = \int 2x\,dx = x^2 + c$$

Y la solución general es

$$y = x^3 + cx$$

Ejercicios

- $(1 + \cos x)y' - (\operatorname{sen} x)y = 2x$. Sol. $y = \frac{x^2+c}{1+\cos x}$.
- $y' \cos x + y \operatorname{sen} x = 1$. Sol. $y = \operatorname{sen} x + c\cos x$.

Ecuaciones lineales de orden superior

Solo veremos ecuaciones lineales con coeficientes constantes. Estas ecuaciones pueden ser de dos tipos: *homogéneas* y *no homogéneas*.

Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

Son ecuaciones del tipo $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots a_1 y' + a_0 y = 0$, con $a_o, a_1, \cdots, a_{n-1}$ ctes.

Para resolverlas se ensaya una solución particular del tipo $y = e^{mx}$. Sustituyendo esta solución en la ecuación se obtienen los valores de m que la verifican.

Ejemplo. Resolver la ecuación $y'' - y = 0$.

Ensayamos una solución del tipo $y = e^{mx}$. Sustituyendo esta solución en la ecuación resulta

$$m^2 e^{mx} - e^{mx} = 0 \Rightarrow e^{mx}(m^2 - 1) = 0 \Rightarrow m = \pm 1$$

Las soluciones son $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y todas sus combinaciones lineales. Por tanto, la solución general queda

$$y = c_1 e^{\,x} + c_2 e^{-x}$$

Este ejemplo nos permite justificar el siguiente método de resolución.

Método de resolución

- Se escribe el polinomio característico de la ecuación, igualado a cero
$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots a_1\lambda + a_0 = 0$$
- Se calculan sus raíces
$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$$
- Si tiene p raíces reales distintas, la solución general viene dada por
$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots c_p e^{\lambda_p x}$$
- Si alguna raíz (por ejemplo λ_1) tiene multiplicidad r, da lugar a un factor
$$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x} + \cdots c_r x^{r-1} e^{\lambda_1 x}$$

Ejemplo. Resolver la ecuación $y''' - y'' - 6y' = 0$.

- Polinomio característico $\lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda = 0$.
- Sus raíces son $\lambda = 0, 3, -2$.
- La solución general es $y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x}$.
- Simplificando queda $y = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x}$.

Ejemplo. Resolver la ecuación $y^{iv} - 3y''' + 3y'' - y' = 0$.

- Polinomio característico $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda = 0$.
- Sus raíces son $\lambda = 0, 1, 1, 1$.
- La solución general es $y = c_1 e^{0x} + c_2 e^x + c_3 x e^x + c_4 x^2 e^x$.
- Simplificando queda $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x + c_4 x^2 e^x$.

Ecuaciones lineales no homogéneas con coeficientes constantes

Son ecuaciones del tipo $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots a_1 y' + a_0 y = f(x)$, con $a_o, a_1, \cdots, a_{n-1}$ ctes. La solución general viene dada por

$$y(x) = y_p(x) + y_g(x)$$

Donde y_p es una solución particular de la ecuación e y_g es la solución general de la ecuación lineal homogénea asociada, que ya sabemos resolver.

Por tanto, el problema se reduce a calcular una solución particular de la ecuación. Para ello existen diversos métodos, pero sólo veremos algunos casos particulares del método de los coeficientes indeterminados.

Método de los coeficientes indeterminados

- Si $f(x)$ es un polinomio, intentamos una solución $y_p = P(x)$, siendo $P(x)$ un polinomio del mismo grado de $f(x)$.
- Si $f(x) = Ce^{kx}$, intentamos una solución del mismo tipo: $y_p = Ae^{kx}$.
- Si $f(x) = C \operatorname{sen} kx$ o $f(x) = C \cos kx$, intentamos una solución $y_p = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx$.
- Si $f(x)$ es producto de funciones de los tipos anteriores, intentamos como solución el producto de las funciones del mismo tipo.

Ejemplo. Resolver la ecuación $y'' + y' - 2y = x^2$.

La solución general de la ecuación asociada es

$$y_g = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

Como $f(x)$ es un polinomio de grado 2, intentamos una solución particular de la forma

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

Sustituyendo la solución particular en la ecuación obtenemos

$$(2A) + (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

De donde $A = -\frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = -\frac{3}{4}$. Por tanto,

$$y_p(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$$

La solución general será

$$y(x) = y_p(x) + y_g(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{3}{4} + c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

Ejemplo. Resolver la ecuación $y'' - y' - 6y = e^x$.

La solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$y_g = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$$

Intentamos una solución particular del tipo

$$y_p = Ae^x$$

Sustituyéndola en la ecuación resulta

$$Ae^x - Ae^x - 6Ae^x = e^x$$

De donde $A = -1/6$. Luego

$$y_p = -\frac{1}{6}e^x$$

La solución general será

$$y(x) = y_p(x) + y_g(x) = -\frac{1}{6}e^x + c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$$

Ejemplo. Resolver la ecuación $y''' - y' = \operatorname{sen} x$.

La solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$y_g = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$$

Intentamos una solución particular del tipo

$$y_p = A \operatorname{sen} x + B \cos x$$

Sustituyendo la solución particular en la ecuación resulta

$$(-A\cos x + B \operatorname{sen} x) - (A \cos x - B \operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x$$

De donde $A = 0, B = 1/2$. Por tanto

$$y_p = \frac{1}{2}\cos x$$

La solución general será

$$y(x) = y_p(x) + y_g(x) = \frac{1}{2}\cos x + c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}.$$