

Ejemplo de aplicación del teorema del límite central

Una empresa de mensajería que opera en la ciudad tarda una **media** de **35 minutos** en llevar un paquete, con una **desviación típica** de **8 minutos**. Supongamos que durante el día de hoy han repartido **200 paquetes**.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que la media de los tiempos de entrega de hoy esté entre 30 y 35 minutos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que, en total, para los doscientos paquetes hayan estado más de 115 horas?.

Consideremos la variable $X = \text{“Tiempo de entrega del paquete”}$. Sabemos que su media es 35 minutos y su desviación típica, 8. Pero fijaos en que no sabemos si esta variable sigue una distribución normal. Durante el día de hoy se han entregado $n = 200$ paquetes. Es decir, tenemos una muestra x_1, x_2, \dots, x_n de nuestra variable.

Por el **teorema del límite central** sabemos que la media muestral se comporta como una normal de esperanza 35 y desviación típica:

$$\frac{8}{\sqrt{200}} = 0,566$$

Si utilizamos esta aproximación, ya podemos contestar a la **pregunta a**. Debemos calcular:

$$P(30 \leq \bar{X} \leq 35) = P\left(\frac{30 - 35}{0,566} \leq \frac{\bar{X} - 35}{0,566} \leq \frac{35 - 35}{0,566}\right)$$

que es aproximadamente igual a la probabilidad siguiente:

$$P\left(\frac{30 - 35}{0,566} \leq Z \leq \frac{35 - 35}{0,566}\right) = P(-8,83 \leq Z \leq 0) = P(Z \leq 0) - P(Z \leq -8,83) = 0,5 - 0 = 0,5$$

donde Z es una normal $(0,1)$. Es decir, tenemos una probabilidad aproximada del **0,4616** de que la media del tiempo de entrega de hoy haya estado entre **30 y 35 minutos**.

Por lo que respecta a la segunda pregunta, de entrada debemos pasar las horas a minutos, ya que ésta es la unidad con la que nos viene dada la variable. Observad que 115 horas por 60 minutos nos dan 6.900 minutos. Se nos pide que calculemos la probabilidad siguiente:

$$P\left(Z > \frac{6900}{200}\right) = P(\bar{X} > 34,5)$$

y como que sabemos que la media se distribuye aproximadamente como una normal de media 35 y desviación típica 0,566 (supondremos siempre que la distribución de la media es normal, ya sea porque la variable de interés es normal o porque la muestra es lo bastante grande), esta probabilidad se puede aproximar por la probabilidad de una distribución normal estándar Z :

$$P\left(Z > \frac{34,5 - 35}{0,566}\right) = P(Z > 0,88) = 1 - P(Z < 0,88) = 1 - 0,1894 = \mathbf{0,8106}$$